1

解答解説のページへ

a を負の実数とする。xy 平面上で曲線 $C: y=|x|x-3x+1$ と直線 $l: y=x+a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ。このとき，C と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。

3

解答解説のページへ

a を奇数とし，整数 m，n に対して，$f(m,\ n)=mn^2+am^2+n^2+8$ とおく。$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるような整数の組 $(m,\ n)$ が存在するための a の条件を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。

5

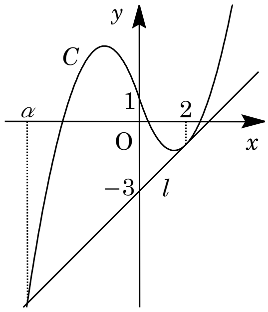
解答解説のページへ

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という。どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

1

問題のページへ



曲線$C : y=|x|x-3x+1$ ……①に対して，

(i)　$x \geqq 0$ のとき　$y=x^2-3x+1=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

(ii)　$x<0$ のとき　$y=-x^2-3x+1=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$

これより，曲線Cは右図のようになる。

さて，C と直線$l : y=x+a$ $(a<0)$ ……②が接するのは$x \geqq 0$においてなので，①②を連立して，

$$x^2-3x+1=x+a,\ x^2-4x+1-a=0$$

すると，判別式$D/4=4-(1-a)=0$より，$a=-3$となる。

このとき，②は$y=x-3$となり，接点は$x=2$である。

次に，$x<0$におけるCとlの交点を$x=\alpha$とおくと，

$$-\alpha^2-3\alpha+1=\alpha-3,\ \alpha^2+4\alpha-4=0 \cdots\cdots\cdots③$$

よって，$\alpha<0$から，$\alpha=-2-2\sqrt{2}$となる。

さて，Cとlで囲まれた部分の面積をSとし，③を用いると，

$$S=\int_0^2\{(x^2-3x+1)-(x-3)\}dx+\int_\alpha^0\{(-x^2-3x+1)-(x-3)\}dx$$

$$=\int_0^2(x-2)^2dx+\int_\alpha^0(-x^2-4x+4)dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2+\Big[\frac{x^3}{3}+2x^2-4x\Big]_0^\alpha=\frac{8}{3}+\frac{\alpha^3}{3}+2\alpha^2-4\alpha$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{\alpha}{3}(-4\alpha+4)+2(-4\alpha+4)-4\alpha$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}(-4\alpha+4)+\frac{4}{3}\alpha-8\alpha+8-4\alpha=-\frac{16}{3}\alpha+\frac{16}{3}=\frac{16}{3}(1-\alpha)$$

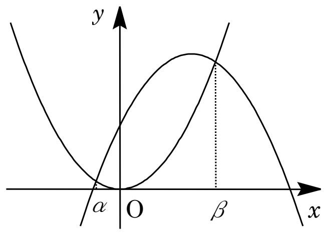
$$=\frac{16}{3}(1+2+2\sqrt{2})=16+\frac{32}{3}\sqrt{2}$$

［解　説］

面積計算の基本題です。定積分はやや面倒ですが。

2

問題のページへ



2 次関数を $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ ……①のグラフが $y=x^2$ ……②のグラフと 2 点で直交するとき，その 2 交点を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。①②を連立して，

$$(a-1)x^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

異なる 2 実数解をもつことより，

$$a\neq 1\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ D=b^2-4c(a-1)>0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

このとき，③から，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a-1}$ ……⑥，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a-1}$ ……⑦が成り立つ。

また，①より $y'=2ax+b$，②より $y'=2x$ となり，2 交点で接線が直交するので

$$2\alpha(2a\alpha+b)=-1\ \cdots\cdots\cdots⑧,\ \ 2\beta(2a\beta+b)=-1\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧－⑨より，$4a(\alpha^2-\beta^2)+2b(\alpha-\beta)=0$ となり，$\alpha<\beta$ から $2a(\alpha+\beta)+b=0$

⑥を代入して $-\dfrac{2ab}{a-1}+b=0$ となり，$-ab-b=0$ から $b(a+1)=0$ ………⑩

⑧＋⑨より，$4a(\alpha^2+\beta^2)+2b(\alpha+\beta)=-2$ となり，⑥⑦を代入して，

$$2a\left\{\left(-\frac{b}{a-1}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a-1}\right\}+b\left(-\frac{b}{a-1}\right)=-1$$

$$\frac{2ab^2}{(a-1)^2}-\frac{4ac+b^2}{a-1}=-1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，⑩より $b=0$ または $a=-1$ となり，

(i)　$b=0$ のとき　⑪から $-\dfrac{4ac}{a-1}=-1$ となり，$4ac=a-1$ から $c=\dfrac{a-1}{4a}$

このとき，⑤から $\dfrac{-4(a-1)^2}{4a}>0$ となり，$\dfrac{(a-1)^2}{a}<0$ なので $a<0$ であり，これは④を満たしている。

(ii)　$a=-1$ のとき　⑪から $-\dfrac{2b^2}{4}+\dfrac{-4c+b^2}{2}=-1$ となり，$-4c=-2$ から $c=\dfrac{1}{2}$

このとき，④は満たし，⑤は $b^2-2\cdot(-2)>0$ となり成立している。

(i)(ii)より，求める 2 次関数は，

$$y=ax^2+\frac{a-1}{4a}\ (a<0),\ \ y=-x^2+bx+\frac{1}{2}$$

［解　説］

放物線を題材に，シンプルな条件設定で興味深い結論を導き出すという京大らしい問題です。数式的な処理としては，④⑤のもとで⑥～⑨をまとめ，係数 a，b，c の条件を求めるというものです。

3　　問題のページへ

奇数 a, 整数 m, n に対して,

$$f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8 = (m+1)n^2 + am^2 + 8$$

このとき，$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れる $(m,\ n)$ が存在する a の条件を求める。

まず, m が奇数のときは，$(m+1)n^2$ は偶数，am^2 は奇数より，$f(m,\ n)$ は奇数となり 16 で割り切れない。次に，m が偶数で n が奇数のときは，$(m+1)n^2$ は奇数，am^2 は偶数より，$f(m,\ n)$ は奇数となり 16 で割り切れない。

よって, m, n がともに偶数であることが必要で, k, l を整数として，$m = 2k$，$n = 2l$ とおくと,

$$f(m,\ n) = 8kl^2 + 4ak^2 + 4l^2 + 8 = 4(2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2)$$

これより，$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるのは，$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$ が 4 で割り切れることに対応し，$g(k,\ l) = 2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$ とおくと,

$$g(k,\ l) = (2k+1)l^2 + ak^2 + 2$$

ここで，$g(k,\ l)$ は偶数であることが必要なので，$2k+1$ と a が奇数であることに注意すると, k と l は，ともに偶数またはともに奇数のいずれかとなる。

(i)　$k = 2p$，$l = 2q$ (p，q は整数) のとき

$$g(k,\ l) = 4(4p+1)q^2 + 4ap^2 + 2 = 4\{(4p+1)q^2 + ap^2\} + 2$$

これより，どんな a に対しても，$g(k,\ l)$ を 4 で割った余りは 2 となる。

(ii)　$k = 2p+1$，$l = 2q+1$ (p，q は整数) のとき

$$\begin{aligned} g(k,\ l) &= (4p+3)(2q+1)^2 + a(2p+1)^2 + 2 \\ &= 4p(2q+1)^2 + 3(4q^2+4q+1) + a(4p^2+4p+1) + 2 \\ &= 4\{p(2q+1)^2 + 3q^2 + 3q + ap^2 + ap + 1\} + a + 1 \end{aligned}$$

これより，$a+1$ が 4 の倍数のとき，$g(k,\ l)$ は 4 で割り切れる。

(i)(ii)より，$a+1$ が 4 の倍数のとき，$g(k,\ l)$ が 4 で割り切れる $(k,\ l)$ が存在する。

以上より，$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるような整数の組 $(m,\ n)$ が存在するのは, $a+1$ が 4 の倍数, すなわち奇数 a を 4 で割った余りが 3 のときである。

［解 説］

整数を偶奇に分けて押さえこむタイプの問題です。力業が要求されます。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，4 点 A, B, C, D が原点 O を中心とする半径 1 の球面上にあるので，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，与えられた条件から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}\cdots\cdots ②,\ \ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{\sqrt{6}}{4}\cdots\cdots ③,\ \ \vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=k\cdots\cdots ④$$

ここで，①②より $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となり，①③より $-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{\sqrt{6}}{4}<-\frac{1}{2}$ に注意すると $120^\circ<\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}<135^\circ$ である。

これより，4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので，$\vec{d}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて，

$$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\quad (p,\ q,\ r\ は定数)\cdots\cdots\cdots ⑤$$

①⑤より，$|p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}|=1$ なので，①②③を利用すると，

$$p^2+q^2+r^2+pq-\frac{\sqrt{6}}{2}qr-\frac{\sqrt{6}}{2}pr=1\cdots\cdots\cdots ⑥$$

②⑤より，$\vec{c}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\frac{1}{2}$ なので，①③を利用すると，

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{4}q+r=\frac{1}{2},\ \ -\sqrt{6}p-\sqrt{6}q+4r=2\cdots\cdots\cdots ⑦$$

④⑤より，$\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})=\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})$ なので，①②③を利用すると，

$$p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=\frac{1}{2}p+q-\frac{\sqrt{6}}{4}r,\ \ p=q\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より $-2\sqrt{6}p+4r=2$ となり，$r=\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots ⑨$

⑥⑧より $3p^2+r^2-\sqrt{6}pr=1$ となり，⑨を代入すると，

$$3p^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{6}p\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=1$$

まとめると，$\frac{3}{2}p^2+\frac{1}{4}=1$ となり，$p^2=\frac{1}{2}$ から $p=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots ⑩$

さて，④⑧⑨より，$k=p+\frac{1}{2}q-\frac{\sqrt{6}}{4}r=p+\frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}p+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}p-\frac{\sqrt{6}}{8}$

ここで，$k>0$ なので⑩より $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$k=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの誘導のない問題です。方針について，成分表示か 1 次結合か迷いましたが，ここでは後者で処理をしました。

5

問題のページへ

まず, 1 行目 4 個のマス目の入れ方は, 1, 2, 3, 4 の数字を 1 列に並べることより, $4! = 24$ 通りの場合がある。

ここで, 右図のように, 1 行目のマス目に左から(1, 2, 3, 4)の順序に数字が入れてある場合を考える。

1	2	3	4
×	×	×	×
×	×	×	×
×	×	×	×

ここで, どの行も 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあり, しかもどの列にも 1, 2, 3, 4 の数字が入れてあることを考え, 2 行 1 列目に入れてある数字で場合分けをする。

(i) 2 行 1 列目の数字が 2 の場合

このとき, 2 行目は次のいずれかとなる。

(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3)

(a) 2 行目の数字の入れ方が(2, 1, 4, 3)のときは, 3 行目は,

(3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2),

(4, 3, 2, 1)

1	2	3	4
2	1	4	3
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(b) 2 行目の数字の入れ方が(2, 3, 4, 1)のときは, 3 行目は,

(3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3)

1	2	3	4
2	3	4	1
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(c) 2 行目の数字の入れ方が(2, 4, 1, 3)のときは, 3 行目は,

(3, 1, 4, 2), (4, 3, 2, 1)

1	2	3	4
2	4	1	3
×	×	×	×
×	×	×	×

また, 4 行目は各々1 通りずつである。

(a)(b)(c)を合わせると, $4+2+2=8$（通り）

(ii) 2 行 1 列目の数字が 3 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

(iii) 2 行 1 列目の数字が 4 の場合　(i)と同じく 8 通りである。

(i)(ii)(iii)より, 求める入れ方は, $24\times(8+8+8)=576$ 通りである。

［解 説］

いろいろな考え方ができる場合の数の問題です。ここでは, 対象が大きなマス目でないので, 具体的に考えています。なお, 解答例の(i)の(b)と(c)については, まとめて記述しても構いません。