1

解答解説のページへ

次の各問いに答えよ。

[1]　座標平面上で，点$(1,\ 2)$を通り傾き a の直線と放物線$y=x^2$によって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする。a が $0 \leqq a \leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$を最小にするようなaの値を求めよ。

[2]　△ABC において AB = 2，AC = 1 とする。∠BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。AD = BD となるとき，△ABC の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上の点$\mathrm{P}(x,\ y)$が$4x+y \leqq 9$，$x+2y \geqq 4$，$2x-3y \geqq -6$の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく一度ずつ用いるものとする。

4

解答解説のページへ

点 O を中心とする正十角形において, A, B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ を満たす点 P をとるとき, $\mathrm{OP} = \mathrm{AB}$ が成立することを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

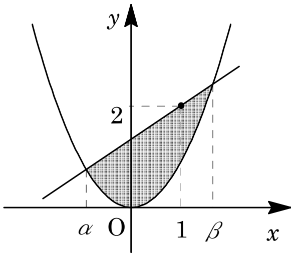
座標空間内で，$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，$E(1,\ 0,\ 1)$，$F(1,\ 1,\ 1)$，$G(0,\ 1,\ 1)$を頂点にもつ立方体を考える。

(1) 頂点Aから対角線OFに下ろした垂線の長さを求めよ。

(2) この立方体を対角線OFを軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

1

問題のページへ



[1]　点$(1,\ 2)$を通る傾き a の直線は，$y-2=a(x-1)$と表せ，放物線$y=x^2$の方程式と連立すると，

$$x^2-2=a(x-1),\quad x^2-ax+a-2=0$$

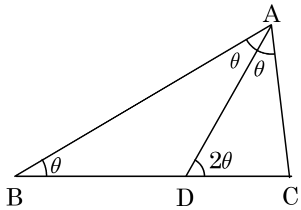
これより，交点の x 座標は$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$となり，この値を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。

すると，放物線と直線によって囲まれる部分の面積$S(a)$は，

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(ax-a+2-x^2)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-4a+8}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(a-2)^2+4}\right)^3$$

よって，aが$0\leqq a\leqq 6$の範囲を変化するとき，$S(a)$は$a=2$のとき最小となる。



[2]　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$の$\triangle\mathrm{ABC}$で，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}$より，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:1$$

よって，$\mathrm{DC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BC}$………①

また，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}=\theta$とおくと，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$から，

$$\angle\mathrm{B}=\theta,\quad \angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{BAD}=2\theta$$

これより，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DAC}$となり，

$$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\mathrm{AC}:\mathrm{DC},\quad \mathrm{BC}\cdot\mathrm{DC}=\mathrm{AC}^2=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{3}\mathrm{BC}^2=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$

これより，$\triangle\mathrm{ABC}$は$\angle\mathrm{C}=90^\circ$の直角三角形となり，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解　説］

[1]は参考書の例題に載っているような定型的な頻出題です。それに反し，[2]は簡単そうな設定ですが，いろいろな解法が考えられ，かえって時間がかかります。

2

問題のページへ

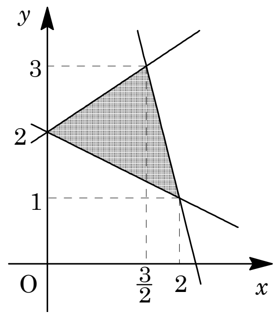
3 直線$4x+y=9$……①，$x+2y=4$……②，$2x-3y=-6$……③に対して，

①②の交点は，$4x+y=9$，$x+2y=4$から，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

②③の交点は，$x+2y=4$，$2x-3y=-6$から，$(x,\ y)=(0,\ 2)$

③①の交点は，$2x-3y=-6$，$4x+y=9$から，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$

これより，領域$4x+y\leqq 9$，$x+2y\geqq 4$，$2x-3y\geqq -6$を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



ここで，$2x+y=k$とおくと，$y=-2x+k$となり，kは傾き-2の直線群のy切片を表す。

この直線が，領域を共有点をもつ範囲を求めると，kは，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$のとき，最大値$k=2\times\dfrac{3}{2}+3=6$をとり，$(x,\ y)=(0,\ 2)$のとき，最小値$k=2\times 0+2=2$をとる。

また，$x^2+y^2=r$とおくと，rは原点を中心とする円の半径の 2 乗を表す。

この円が領域と共有点をもつ範囲を求めると，rは，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$のとき，最大値$r=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3^2=\dfrac{45}{4}$をとる。

さて，原点と直線②の距離は，$\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$であり，また直線②の法線ベクトルの成分を$(1,\ 2)$とおくことができるので，垂線方向の単位ベクトルは$\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)$となる。これから，原点から直線②に下ろした垂線の足の座標は，

$$\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

これより，rは，$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$のとき，最小値$r=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{16}{5}$をとる。

［解 説］

前問の[1]と同じく，定型的で，方針に迷いの生じない問題です。

3

問題のページへ

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる $5!$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，この数の列の 1 番目，2 番目，3 番目，4 番目，5 番目の数を，それぞれ a, b, c, d, e とすると，条件より，

$$a+b+c=c+d+e,\ a+b=d+e\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, $a<b$, $d<e$ のとき, $(*)$を満たす$(a,\ b,\ d,\ e)$の組は,

$(1,\ 4,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 5,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 1,\ 5)$

$(2,\ 5,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 2,\ 5)$

また，各々の場合, c の値はただ 1 つ決まる。

すると, $(*)$を満たす$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$の組は，$2!\times2!\times6$ 通りとなり，求める確率は,

$$\frac{2!\times2!\times6}{5!}=\frac{1}{5}$$

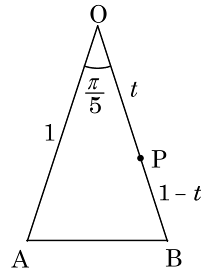
［解 説］

センター試験に出題されるような問題です。対象が 5 までの自然数という設定なので，条件に適する場合を羅列しています。

4

問題のページへ

点 O を中心とする正十角形において，A，B が隣接する 2 頂点であることより，△OAB は，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{5}$，$\angle OAB=\angle OBA=\dfrac{2\pi}{5}$ である二等辺三角形である。



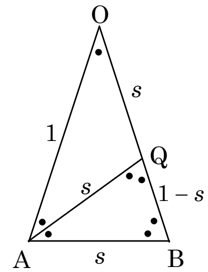
さて，$OA=OB=1$，$OP=t$ とおくと，条件 $OP^2=OB\cdot PB$ より，

$$t^2=1\times(1-t),\ \ t^2+t-1=0,\ \ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

一方，$\angle OAB$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とおくと，

$$\angle AOB=\angle BAQ=\frac{\pi}{5},\ \ \angle OAB=\angle ABQ=\frac{2\pi}{5}$$

これより，$\triangle OAB \backsim \triangle ABQ$ となる。



ここで，$OQ=s$ とおくと，$AQ=AB=s$ となり，,

$$1:s=s:1-s,\ \ s^2+s-1=0,\ \ s=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$t=s$ から点 P と点 Q は一致し，$OP=AB$ が成立する。

［解 説］

$\cos\dfrac{\pi}{5}$ や $\sin\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めるときに，誘導として現れる二等辺三角形が題材となっています。この知識をもとに，力ずくで抑え込んだ解答例です。

5

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1,\ 1,\ 1)$ より，直線 OF の方程式は，

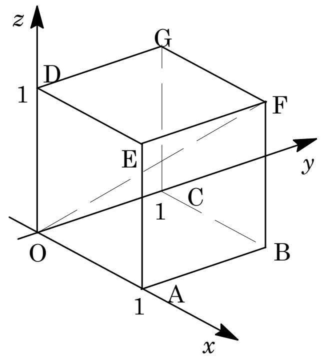
$$x=y=z\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ を含み，OF に垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+z=0\ ,\ \ x+y+z=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

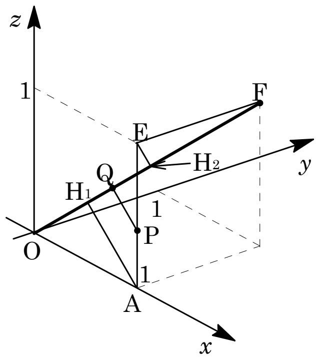
①②を連立すると，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$

よって，点 A から OF に下ろした垂線の足を H_1 とすると，$\mathrm{H}_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$となり，垂線の長さ AH_1 は，



$$\mathrm{AH}_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)　立方体 OABC-DEFG を対角線 OF を軸にして回転してできる立体は，折れ線 OA, AE, EF を OF を軸にして回転してできる立体に等しい。



(i)　辺 OA を OF を軸にして回転したとき

回転体は，AH_1 を半径とする円を底面とし，高さ OH_1 の円錐となり，(1)から，

$$\mathrm{OH}_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，この円錐の体積を V_1 とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

(ii)　辺 AE を OF を軸にして回転したとき

$0\leqq u\leqq 1$ として，辺 AE 上の点を $\mathrm{P}(1,\ 0,\ u)$ とおくと，点 P を含み，OF に垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+(z-u)=0\ ,\ \ x+y+z=1+u\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を連立すると，$x=y=z=\dfrac{1+u}{3}$

よって，点 P から OF に下ろした垂線の足 Q は，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{1+u}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}-u\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{u^2-u+1}$$

また，点 E から OF に下ろした垂線の足 H_2 は，$u=1$ から $\mathrm{H}_2\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{OH}_2=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

さて，$\mathrm{OQ}=t$，辺 AE を OF を軸にして回転した立体の体積を V_2 とおくと，

$$V_2=\pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}\mathrm{PQ}^2dt=\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}(u^2-u+1)\,dt$$

ここで，$t=\sqrt{\left(\frac{1+u}{3}\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(1+u)$ から，

$$V_2=\frac{2}{3}\pi\int_0^1(u^2-u+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}du=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1=\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi$$

(iii) 辺 EF を OF を軸にして回転したとき

回転体は，EH_2 を半径とする円を底面とし，高さ FH_2 の円錐となり，この円錐の体積を V_3 とおくと，対称性より, (i)と同じく $V_3=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$ である。

(i)(ii)(iii)より，立方体を対角線 OF を軸にして回転してできる立体の体積 V は,

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi+\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi+\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

［解 説］

水平な台の上に，対角線が鉛直になるように立てたサイコロを，対角線を軸として回転したときにできる立体の体積を求めるという有名問題です。京大独自の拡張した範囲からの出題ですが，普通に解いた上の解では，置換積分も利用していることから，文系には厳しい内容になっています。