1

解答解説のページへ

a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2)　四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3)　四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq\sqrt{2}x$ となることを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^n dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

p を正の実数とする。曲線 $y=\sin x$ $(x>0)$ の接線で点 $(-p,\ 0)$ を通るものをすべて考え，それらの接点の x 座標を小さい方から順に a_1，a_2，a_3，…，a_n，…とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_{n+1}-a_n>\pi$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_1=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_{n+1}>n\pi+\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。

4

解答解説のページへ

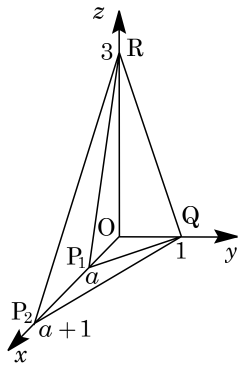
以下の問いに答えよ。

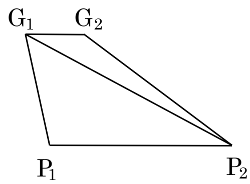
(1)　$m \leqq n$ であって，$mn+2={}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組$(m,\ n)$を 1 つ求めよ。

(2)　$m \leqq n$ であって，$mn+2={}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組$(m,\ n)$は，(1)で求めた組に限ることを示せ。

1

問題のページへ





(1)　$P_1(a,\ 0,\ 0)$，$P_2(a+1,\ 0,\ 0)$，$Q(0,\ 1,\ 0)$，$R(0,\ 0,\ 3)$ に対して，G_1，G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$，$\triangle P_2QR$ の重心とするとき，$G_1\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$，$G_2\left(\dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ となる。

すると，$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{G_1G_2}=\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ から，

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって，$G_1G_2 \parallel P_1P_2$ である。

(2)　$\overrightarrow{P_1G_1}=\left(-\dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ となり，

$$\triangle P_1P_2G_1=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2|\overrightarrow{P_1G_1}|^2-(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1G_1})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}+1\right)-\left(-\frac{2}{3}a\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$$

また，①から $\triangle P_2G_2G_1=\dfrac{1}{3}\triangle P_1P_2G_1=\dfrac{\sqrt{10}}{18}$ なので，台形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積 S は，

$$S=\triangle P_1P_2G_1+\triangle P_2G_2G_1=\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{\sqrt{10}}{18}=\frac{2}{9}\sqrt{10}$$

(3)　点 Q から平面 $P_1P_2G_1$ に下ろした垂線と平面 $P_1P_2G_1$ との交点を H とおくと，s, t を実数として，$\overrightarrow{P_1H}=s\overrightarrow{P_1P_2}+t\overrightarrow{P_1G_1}$ と表せ，

$$\overrightarrow{QH}=\overrightarrow{P_1H}-\overrightarrow{P_1Q}=s(1,\ 0,\ 0)+t\left(-\frac{2}{3}a,\ \frac{1}{3},\ 1\right)-(-a,\ 1,\ 0)$$
$$=\left(s-\frac{2}{3}at+a,\ \frac{t}{3}-1,\ t\right)$$

すると，$\overrightarrow{QH}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$ かつ $\overrightarrow{QH}\perp\overrightarrow{P_1G_1}$ より，$\overrightarrow{QH}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=s-\dfrac{2}{3}at+a=0\ \cdots\cdots\cdots ②$

$$\overrightarrow{QH}\cdot\overrightarrow{P_1G_1}=-\frac{2}{3}a\left(s-\frac{2}{3}at+a\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}-1\right)+t=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\dfrac{t}{9}-\dfrac{1}{3}+t=0$ となり $t=\dfrac{3}{10}$ から，$\overrightarrow{QH}=\left(0,\ -\dfrac{9}{10},\ \dfrac{3}{10}\right)$ である。

すると，$|\overrightarrow{QH}|=\sqrt{\dfrac{81}{100}+\dfrac{9}{100}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$ となり，四角錐 Q-$P_1P_2G_2G_1$ の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{QH}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{10}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}=\frac{2}{9}$$

［解 説］

空間ベクトルの応用問題で，頻出のタイプです。(3)は平面 $P_1P_2G_1$ の方程式を利用するという方法も考えられます。

2

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$において，$f(x) = \sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ を変形すると，

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{1-\cos\pi x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3-\cos\pi x}$$

よって，$f(x)$は，$x=1$のとき最大値$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+1} = \sqrt{2}$をとる。

(2)　$g(x) = f(x) - \sqrt{2}x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3-\cos\pi x} - 2x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3-\cos\pi x - 4x^2}{\sqrt{3-\cos\pi x}+2x}$ とおく。

さらに，$h(x) = 3-\cos\pi x - 4x^2$ とおくと，$h'(x) = \pi\sin\pi x - 8x$

$$h''(x) = \pi^2\cos\pi x - 8$$

すると，$\pi^2 > 8$ なので，$h''(x) = 0$ を満たすxが$0 < x < 1$に 1 つ存在し，この値を$x = \alpha$とおくと，$h'(x)$の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-8

さらに，右上の増減表より，$h'(x) = 0$ を満たす x が$\alpha < x < 1$に 1 つ存在し，この値を$x = \beta$とおくと，$h(x)$の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって，$0 \leqq x \leqq 1$ において$h(x) \geqq 0$，すなわち$g(x) \geqq 0$ となるので，$f(x) \geqq \sqrt{2}x$ である。

(3)　(1)(2)より，$0 \leqq x \leqq 1$において，$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$ なので，

$$(\sqrt{2})^n x^n \leqq \{f(x)\}^n \leqq (\sqrt{2})^n \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$a_n = \displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^n dx$ のとき，①の各辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$(\sqrt{2})^n\int_0^1 x^n\,dx \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n\int_0^1 dx\,,\ \ \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n$$

よって，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2} \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，$b_n = \sqrt[n]{n+1}$ とおくと，$\log b_n = \log\sqrt[n]{n+1} = \dfrac{\log(n+1)}{n}$ となり，$n\to\infty$ のとき$\log b_n \to 0$となるので，対数関数の連続性より$b_n \to 1$である。

したがって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$ である。

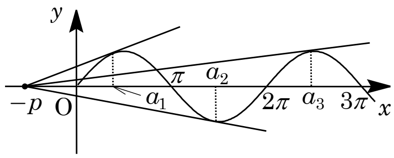
［解 説］

微分と増減に極限を組み合わせた問題です。なお，(2)で$h(x)$を設定したのは，平方根の入った関数の導関数はややこしくなることが多いためです。

3

問題のページへ

(1)　曲線 $y=\sin x$ $(x>0)$ 上の点 $(t,\ \sin t)$ における接線の方程式は，$y'=\cos x$ より，



$$y-\sin t=(\cos t)(x-t)$$

点 $(-p,\ 0)$ $(p>0)$ を通ることより，

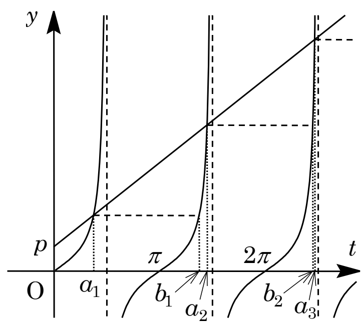
$$-\sin t=(\cos t)(-p-t)$$

ここで，$\cos t=0$ とすると成り立たないので，$\cos t\neq 0$ のもとで，

$$\tan t=p+t\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$t=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ から，$\tan a_n=a_n+p\ \cdots\cdots\cdots②$

(2)　$y=\tan t$ $(t>0)$ と $y=p+t$ のグラフを描くと，右図のようになり，①より，交点の t 座標が，小さい方から $t=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ である。



すると，$0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$，$n\geqq 2$ において，

$$\left(n-\frac{3}{2}\right)\pi<a_n<\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$$

そして，$b_n=a_n+\pi$ とおくと，

$$\tan b_n=\tan a_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，②より，$\tan a_{n+1}-\tan a_n=a_{n+1}-a_n>0$ となり，$\tan a_{n+1}>\tan a_n$

すると，③から，$\tan a_{n+1}>\tan b_n$

ここで，$\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi<a_{n+1}<\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi<b_n<\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ より，

$$a_{n+1}>b_n,\ \ a_{n+1}>a_n+\pi$$

すなわち，$a_{n+1}-a_n>\pi\ \cdots\cdots④$が成り立つ。

(3)　$a_1=\dfrac{\pi}{3}$ なので，②より $\tan a_1=a_1+p$ となり，$\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}+p$ から $p=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

$$\tan a_{n+1}=a_{n+1}+p=a_{n+1}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，④より，$a_{n+1}>a_1+n\pi=\dfrac{\pi}{3}+n\pi$ となり，⑤に代入すると，

$$\tan a_{n+1}>\frac{\pi}{3}+n\pi+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}=n\pi+\sqrt{3}$$

［解　説］

三角関数のグラフの接線を題材とした数列の問題です。(2)については，上の図を見ながら解答例を記述しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$m \leqq n$ を満たす正の整数 m, n に対して，$mn+2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ ………(＊)

$(m,\ n)=(2,\ 2)$ とすると，$mn+2=4+2=6$，${}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$ となり，(＊)を満たす 1 つの $(m,\ n)$ になっている。

(2)　(i)　$m=1$ のとき　(＊)より，$n+2={}_{1+n}\mathrm{C}_1$ となり，$n+2=1+n$ から不成立。

(ii)　$m=2$ のとき　(＊)より，$2n+2={}_{2+n}\mathrm{C}_2$ となり，

$$2n+2=\frac{1}{2}(2+n)(1+n),\quad 4(n+1)=(n+2)(n+1)$$

$2 \leqq n$ から $n+1>0$ となり，$4=n+2$ から $n=2$ である。

よって，(＊)を満たす $(m,\ n)$ は $(m,\ n)=(2,\ 2)$ のみである。

(iii)　$m \geqq 3$ のとき　$3 \leqq m \leqq n$ のもとで，$P(n)={}_{m+n}\mathrm{C}_m-(mn+2)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
P(n) &> {}_{m+n}\mathrm{C}_m-(mn+m)=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}-m(n+1)\\
&=\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+m-1)(n+m)}{m!}-m(n+1)\\
&=m(n+1)\left\{\frac{(n+2)\cdots\cdots(n+m-1)(n+m)}{m\cdot m!}-1\right\}\\
&>m(n+1)\left\{\frac{(n+2)\cdots\cdots(n+m-1)(n+m)}{(m+1)!}-1\right\}\\
&\geqq m(n+1)\left\{\frac{(3+2)\cdots\cdots(3+m-1)(3+m)}{(m+1)!}-1\right\}\\
&=m(n+1)\left\{\frac{(3+m)!}{2\cdot 3\cdot 4(m+1)!}-1\right\}=m(n+1)\left\{\frac{(m+2)(m+3)}{24}-1\right\}\\
&\geqq m(n+1)\left(\frac{5\cdot 6}{24}-1\right)=\frac{1}{4}m(n+1)>0
\end{aligned}$$

よって，$P(n)=0$ を満たす $(m,\ n)$ は存在しない。

(i)〜(iii)より，(＊)を満たす正の整数の組は $(m,\ n)=(2,\ 2)$ のみである。

［解　説］

二項係数を題材にした論証問題です。(2)は $m=1$，$m=2$，$m=3$，$m=4$ として具体的に考えた後，$m \geqq 3$ ではアバウトな評価で $P(n)>0$ が示せるだろうと思い，力ずくの不等式処理をしました。