1

解答解説のページへ

空間の点 O を通らない平面αをとる。α上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。$k$ を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$と表せるとする。$l$ 上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y の軌跡を m とする。

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。lを含みαに平行な平面をβとし，O, D を通る直線と平面βの交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および k を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のとりうる範囲を求めよ。

(2) △ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) △ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ△ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

媒介変数 t を用いて表された曲線 $C: x = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$，$y = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ を考える。

(1)　点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して, MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2)　(1)の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を l とするとき, 曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2)の D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

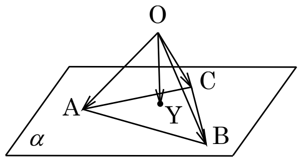
(1)　n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

(2)　c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c} |\sin nx - \sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　直線 $l:\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\ (k>1)$ に対し，



2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y とすると，s を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\left\{\frac{2tk}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{c}\right\}$$

点 Y は平面 α 上にあるので，$s\left\{\dfrac{2tk}{3}+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k\right\}=1$

すると，$sk=1$ となり，$s=\dfrac{1}{k}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 Y の軌跡を m として，

(i)　直線 AB と m の交点　①より $\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=2$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

すると，交点は線分 AB を $1:4$ に外分するので，辺 AB 上にない。

(ii)　直線 BC と m の交点　①より $\dfrac{2t}{3}=0$ から $t=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

すると，交点は線分 BC を $2:1$ に内分するので，辺 BC 上にある。

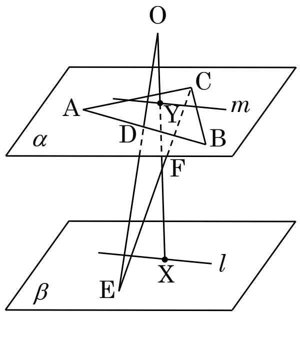
(iii) 直線 CA と m の交点　①より $\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=1$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

すると，交点は線分 AC を $1:2$ に内分するので，辺 CA 上にある。

(i)～(iii)より，△ABC の辺と m との交点 Z について，辺 AB とはなし，

辺 BC とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$，辺 CA とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)　l を含み α に平行な平面を β とし，O と辺 AB の中点 D を通る直線と β の交点を E とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

ここで，直線 CE と直線 OY が交点 F をもつとき，まず線分 CE を $u:1-u$ に分ける点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=\frac{k}{2}u\vec{a}+\frac{k}{2}u\vec{b}+(1-u)\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

次に，直線 OY 上に F があるので，v を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=v\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{2tv}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{c}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$\frac{k}{2}u=\frac{2tv}{3}\cdots\cdots④,\ \frac{k}{2}u=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑤,\ 1-u=\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑥$$

④⑤から $\dfrac{2tv}{3}=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)v$ となり，$v\neq 0$ より $\dfrac{2t}{3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}$ なので $t=\dfrac{1}{3}$ である。

すると，④は $\dfrac{k}{2}u=\dfrac{2v}{9}$，⑥は $1-u=\dfrac{5}{9}v$ となり，$5ku=4(1-u)$ から，

$$u=\frac{4}{5k+4},\quad v=\frac{9k}{4}\cdot\frac{4}{5k+4}=\frac{9k}{5k+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{4}{5k+4}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{4}{5k+4}\vec{b}+\left(1-\dfrac{4}{5k+4}\right)\vec{c}=\dfrac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})$

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。取り掛かりにくく込み入った問題文ですが，内容は基本の組合せです。ただ，量的にかなり多めですが。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　条件より，$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$ なので，

$$\alpha^2(w^2+4w+4)+\beta^2w^2-4\gamma^2=4\alpha^2w+8\alpha^2+2\alpha\beta w^2-8\alpha\gamma$$

$$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)w^2=4\alpha^2-8\alpha\gamma+4\gamma^2,\ (\beta-\alpha)^2w^2=4(\gamma-\alpha)^2$$

すると，$(\beta-\alpha)w=\pm 2(\gamma-\alpha)$ から，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{w}{2}$

ここで，複素数 w は実部，虚部ともに正から，$0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

(i)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{w}{2}$ のとき　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\arg\dfrac{w}{2}$ から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(ii)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{w}{2}$ のとき　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\arg\left(-\dfrac{w}{2}\right)$ から，$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$\triangle$ABC が正三角形であるとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ なので，(1)より $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{w}{2}$ となり，

$$\left|\frac{w}{2}\right|=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1,\ \arg\frac{w}{2}=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{3}$$

よって，$\dfrac{w}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ より，$w=1+\sqrt{3}i$ となる。

(3)　$\triangle$ABC が正三角形で $w=\alpha$ のとき，(2)から $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha}{2}$ となり，

$$\gamma-\alpha=\frac{\alpha}{2}(\beta-\alpha),\ -\alpha\beta+2\gamma=-\alpha^2+2\alpha$$

ここで，$\alpha=1+\sqrt{3}i$ のとき，$(\alpha-1)^2=-3$ から $\alpha^2=2\alpha-4$ となり，

$$-\alpha\beta+2\gamma=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}=\dfrac{\alpha^2}{2}$ であることより，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\dfrac{\alpha^2}{2}$

$$2(\alpha+\beta+\gamma)=3\alpha^2,\ 2\beta+2\gamma=3\alpha^2-2\alpha$$

すると，$3\alpha^2-2\alpha=3(2\alpha-4)-2\alpha=4\alpha-12=-8+4\sqrt{3}i$ から，

$$2\beta+2\gamma=-8+4\sqrt{3}i\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(2+\alpha)\beta=-12+4\sqrt{3}i$ となり，

$$\beta=\frac{-4(3-\sqrt{3}i)}{3+\sqrt{3}i}=\frac{-4(3-\sqrt{3}i)^2}{9+3}=-\frac{6-6\sqrt{3}i}{3}=-2+2\sqrt{3}i$$

$$\gamma=(-4+2\sqrt{3}i)-\beta=-2$$

［解　説］

複素数と図形の問題です。条件で与えられた式は，見かけほどではありません。ただ，(3)は数値計算で押し通しましたが，かなり面倒です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　曲線 $C: x=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cdots\cdots$①，$y=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})\cdots\cdots$②に対して，

$$x+y=e^t,\ x-y=e^{-t}$$

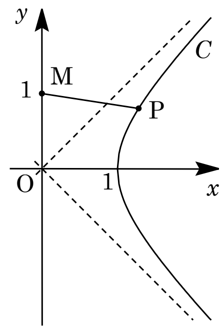
よって，$(x+y)(x-y)=e^t\cdot e^{-t}$ から，$x^2-y^2=1\cdots\cdots\cdots$③

ここで，①から $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$，②から $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	0	$+$
x	$\searrow$	1	$\nearrow$
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$		$+$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$

すると，t の値の変化に対する x, y の増減は右表のようになり，曲線 C は双曲線③の右の枝である。

さて，点 $\mathrm{M}(0,\ 1)$ と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の距離 MP は，



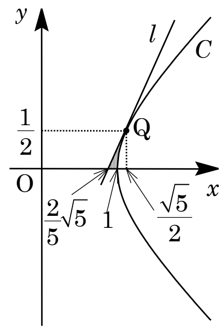
$$\mathrm{MP}^2=x^2+(y-1)^2=(y^2+1)+(y-1)^2$$
$$=2y^2-2y+2=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

これより，$y=\dfrac{1}{2}$ のとき MP は最小になる。このとき，$t=t_0$ とおくと，②から $\dfrac{1}{2}(e^{t_0}-e^{-t_0})=\dfrac{1}{2}$ となり，

$$e^{t_0}-e^{-t_0}=1,\ e^{2t_0}-e^{t_0}-1=0$$

$e^{t_0}>0$ から $e^{t_0}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となり，$t_0=\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)　$y=\dfrac{1}{2}$ のとき，③から $x=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となり $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。点 Q における接線 l の方程式は，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{1}{2}y=1$ から，



$$y=\sqrt{5}x-2\cdots\cdots\cdots④$$

l と x 軸の交点の x 座標は，$\sqrt{5}x-2=0$ から $x=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ となり，曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\cdot\frac{1}{2}-\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}}y\,dx=\frac{\sqrt{5}}{40}-\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}}y\,dx$$

ここで，①②より，$dx=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})dt$ となり，$x=1\to\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき $t=0\to t_0$ から，

$$\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}}y\,dx=\int_0^{t_0}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\cdot\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})dt=\frac{1}{4}\int_0^{t_0}(e^{2t}-2+e^{-2t})dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{t_0}=\frac{1}{8}(e^{2t_0}-1)-\frac{1}{2}t_0-\frac{1}{8}(e^{-2t_0}-1)$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$S=\dfrac{\sqrt{5}}{40}-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{8}-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

(3)　③より $x^2=y^2+1$，④より $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(y+2)$ であるので，D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(y^2+1)\,dy-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}(y+2)^2\,dy=\pi\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{5}\left[\frac{1}{3}(y+2)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{15}\left(\frac{125}{8}-8\right)=\pi\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{2}-\frac{25}{24}+\frac{8}{15}\right)=\frac{\pi}{30}$$

［解　説］

パラメータ曲線と面積・体積の問題です。与えられたパラメータ表示が双曲線を表すことは，有名というほどではないにせよ，ときどき見かけることなので，まず方程式を導きました。そして，これをもとに計算を進めています。なお，やや計算量は増えますが，パラメータ表示のまま処理をしても構いません。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1) n が正の整数のとき，$I_n=\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ に対して，$nx=t$ とおくと $ndx=dt$ となり，

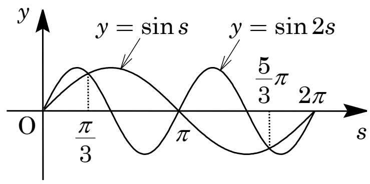
$$I_n=\int_0^{2n\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|\cdot\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，積分区間を分割すると，$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$

そこで，$J_k=\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$ とおき，また $s=t-2(k-1)\pi$ と変数変換すると $ds=dt$ から，

$$J_k=\int_0^{2\pi}\left|\sin(s+2(k-1)\pi)-\sin(2s+4(k-1)\pi)\right|ds$$
$$=\int_0^{2\pi}\left|\sin s-\sin 2s\right|ds$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin s-\sin 2s)ds+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$$
$$+\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}-(\sin s-\sin 2s)ds+\int_{\frac{5}{3}\pi}^{2\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$$

さらに，$u=2\pi-s$ とおくと $du=-ds$ から，



$$\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}-(\sin s-\sin 2s)ds$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}-\{\sin(2\pi-u)-\sin(4\pi-2u)\}(-du)$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-(-\sin u+\sin 2u)du=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin u-\sin 2u)du$$
$$\int_{\frac{5}{3}\pi}^{2\pi}(\sin s-\sin 2s)ds=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\{\sin(2\pi-u)-\sin(4\pi-2u)\}(-du)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin u+\sin 2u)du=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin u-\sin 2u)du$$

したがって，$J_k=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin s-\sin 2s)ds+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$ となり，

$$J_k=2\left[\cos s-\frac{1}{2}\cos 2s\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\left[\cos s-\frac{1}{2}\cos 2s\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(-\frac{1}{2}-1\right)-2\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)=-1+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=5$$

よって，$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}J_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}5=\frac{1}{n}\cdot 5n=5$

(2)　$c>0$ のとき，$K_n=\displaystyle\int_0^c \left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ に対して，(1)と同様に $nx=t$ とおく。

$$K_n=\frac{1}{n}\int_0^{cn}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，十分に大きな n に対して，$2m\pi \leqq cn < 2(m+1)\pi$ ……③を満たす正の整数 m が存在するので，

$$\int_0^{2m\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt \leqq \int_0^{cn}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt < \int_0^{2(m+1)\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$$

①②より，$mI_m \leqq nK_n < (m+1)I_{m+1}$ となり，(1)から $I_m=I_{m+1}=5$ なので，

$$5m \leqq nK_n < 5(m+1)\,,\ \ \frac{5m}{n}\leqq K_n < \frac{5(m+1)}{n}=\frac{5m}{n}+\frac{5}{n}\cdots\cdots\cdots④$$

そして，③から，$\dfrac{m}{n}\leqq\dfrac{c}{2\pi}$ かつ $\dfrac{c}{2\pi}<\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{1}{n}$ となるので，

$$\frac{c}{2\pi}-\frac{1}{n}<\frac{m}{n}\leqq\frac{c}{2\pi}\,,\ \ \frac{5c}{2\pi}-\frac{5}{n}<\frac{5m}{n}\leqq\frac{5c}{2\pi}$$

すると，④より，$\dfrac{5c}{2\pi}-\dfrac{5}{n}<K_n<\dfrac{5c}{2\pi}+\dfrac{5}{n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^c\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx=\lim_{n\to\infty}K_n=\frac{5c}{2\pi}$$

［解 説］

有名な定積分の計算問題です。ポイントは周期性の利用で，積分区間を分割し，グラフを参考にしながら計算を進めますが，時間的には非常に厳しいものがあります。