1

解答解説のページへ

xy 平面上において，媒介変数 $t\left(0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$x=\sin t,\ \ y=1-\cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　C 上の点 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

α，βを複素数とし，複素数平面上の点O(0)，A(α)，B(β)，C$(|\alpha|^2)$，D$(\overline{\alpha}\beta)$を考える。3点O, A, Bは三角形をなすとする。また，複素数zに対し，$\mathrm{Im}(z)$によってzの虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　△OABの面積をS_1，△OCDの面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ。

(2)　△OABの面積S_1は$\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)\right|$で与えられることを示せ。

(3)　実数a, bに対し，複素数zを$z=a+bi$で定める。$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$のとき，3点O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$を頂点とする△OPQの面積の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2)　$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

4

解答解説のページへ

xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点$(x,\ y)$を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0<x<n\,,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点$(x,\ y)$の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　$x=\sin t$，$y=1-\cos 3t\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi\right)$と表される曲線 C に対し，x 座標が最大になるのは$t=\dfrac{\pi}{2}$のときで，このとき対応する点 P の座標は$\mathrm{P}(1,\ 1)$である。

また，y 座標が最大になるのは$3t=\pi\ \left(t=\dfrac{\pi}{3}\right)$のときで，このとき対応する点 Q の座標は$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)$である。

(2)　$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$のとき，$\sin t=\dfrac{1}{2}$，$1-\cos 3t=1$となり，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$から$t=\dfrac{\pi}{6}$

さて，$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\sin 3t$より，$t=\dfrac{\pi}{6}$のとき$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{dy}{dt}=3$となり，

$$\frac{dy}{dx}=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

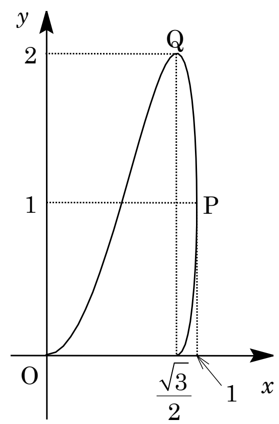
すると，点$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$における接線の方程式は，$y-1=2\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$より，

$$y=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1$$

(3) まず，曲線 C に対して，x，y の増減を調べると，右表のようになる。これをもとに，C の概形を描くと，右下図の通りである。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0

さて，C の O→Q→P の部分を$y=y_1(x)$，また$\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$とおき P→R の部分を$y=y_2(x)$とすると，$C$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，



$$S=\int_0^1 y_1(x)\,dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 y_2(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 3t)\cos t\,dt-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 3t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(1-\cos 3t)\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left\{\cos t-\frac{1}{2}(\cos 4t+\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\left[\sin t-\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

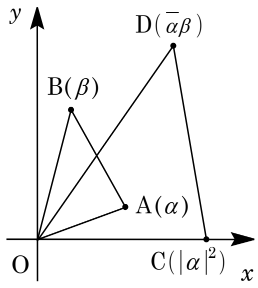
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}\sqrt{3}$$

［解 説］

パラメータ曲線と面積という頻出題です。パラメータ t に置換すると，定積分の計算が 1 つにまとまる点が重要です。

2

問題のページへ



(1) 複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C($|\alpha|^2$)，D($\overline{\alpha}\beta$)に対して，$\alpha=a_1+a_2i$，$\beta=b_1+b_2i$ とおくと，

$$|\alpha|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$$
$$\overline{\alpha}\beta=(a_1-a_2i)(b_1+b_2i)=a_1b_1+a_2b_2+(a_1b_2-a_2b_1)i$$

△OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とすると，

$$S_1=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|,\ S_2=\frac{1}{2}(a_1{}^2+a_2{}^2)|a_1b_2-a_2b_1|$$

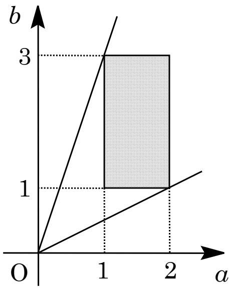
よって，$\dfrac{S_2}{S_1}=a_1{}^2+a_2{}^2=|\alpha|^2$ となる。

(2) $\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)=a_1b_2-a_2b_1$ なので，(1)より，$S_1=\dfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)|$

(3) $z=a+bi$（$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$）のとき，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$ となり，

$$\overline{z}\cdot\frac{1}{z}=\frac{(\overline{z})^2}{|z|^2}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}$$

さて，P(z)，Q $\left(\dfrac{1}{z}\right)$ のとき，△OPQ の面積を S とすると，(2)から，



$$S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(\overline{z}\cdot\frac{1}{z}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-2ab}{a^2+b^2}\right|=\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

ここで，$t=\dfrac{b}{a}$ とおくと，右図より $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 3$ である。

そして，$f(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$ とすると，$S=f(t)$ となり，

$$f'(t)=\frac{(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=-\frac{(t+1)(t-1)}{(1+t^2)^2}$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ すなわち S の最大値は $\dfrac{1}{2}$，最小値は $\dfrac{3}{10}$ である。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{10}$

［解　説］

複素数平面上の三角形の面積を題材としていますが，上の解法では xy 平面上で考えるのと内容的には同じです。そのため，2 変数の分数関数の処理がポイントです。

3

問題のページへ

(1)　以下，mod5 で記述する。自然数 x に対して，

$x \equiv 0$ のとき $x^2 \equiv 0$，$x \equiv 1$ のとき $x^2 \equiv 1$，$x \equiv 2$ のとき $x^2 \equiv 4$

$x \equiv 3$ のとき $x^2 \equiv 9 \equiv 4$，$x \equiv 4$ のとき $x^2 \equiv 16 \equiv 1$

これより，x^2 を 5 で割ったときの余りは $0, 1, 4$ のいずれかである。

(2)　自然数 x, y, z に対して，$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ ……①の成立を仮定する。

まず，$5y^2 \equiv 0$ から，(1)の結果を利用すると，$x^2 + 5y^2 \equiv 0,\ 1,\ 4$

また，$z^2 \equiv 0,\ 1,\ 4$ から，$z^2 \equiv 0$ のとき $2z^2 \equiv 0$，$z^2 \equiv 1$ のとき $2z^2 \equiv 2$，$z^2 \equiv 4$ のとき $2z^2 \equiv 8 \equiv 3$ となる。

すると，①から $x^2 + 5y^2 \equiv 2z^2$ なので，$x^2 + 5y^2 \equiv 0$ かつ $2z^2 \equiv 0$，すなわち $x \equiv 0$ かつ $z \equiv 0$ となり，x_1，z_1 を自然数として，$x = 5x_1$，$z = 5z_1$ と表せる。

①に代入すると，$25{x_1}^2 + 5y^2 = 50{z_1}^2$，$5{x_1}^2 + y^2 = 10{z_1}^2$

これより $y^2 \equiv 0$，すなわち $y \equiv 0$ となり，y_1 を自然数として $y = 5y_1$ と表せる。

すると，①から，$25{x_1}^2 + 125{y_1}^2 = 50{z_1}^2$ となり，

$${x_1}^2 + 5{y_1}^2 = 2{z_1}^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

同様に考えると，②から，$x_1 \equiv 0$，$y_1 \equiv 0$，$z_1 \equiv 0$ となるので，x_2，y_2，z_2 を自然数として，$x_1 = 5x_2$，$y_1 = 5y_2$，$z_1 = 5z_2$ と表せ，②に代入すると，

$$25{x_2}^2 + 125{y_2}^2 = 50{z_2}^2,\ {x_2}^2 + 5{y_2}^2 = 2{z_2}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

この①→②→③の操作を同様に繰り返すと，$x > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$，$y > y_1 > y_2 > \cdots > y_n > \cdots$，$z > z_1 > z_2 > \cdots > z_n > \cdots$ となる無限個の自然数の数列が存在することになる。

しかし，ある n で $x_n \leqq 0$ または $y_n \leqq 0$ または $z_n \leqq 0$ となり，成立しない。

したがって，①を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない。

［解　説］

不定方程式の解の存在についての論証問題です。(2)については，単調減少する無限個の自然数は存在しないということです。ときどき遭遇する論法の 1 つです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) n が 2 以上の整数のとき，整数 x, y に対して，

$$0<x<n \cdots\cdots\cdots ①,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots ②$$

①より $1\leqq x\leqq n-1$，②より $0<y<\log_2\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ から，$1\leqq y<n\log_2\left(1+\frac{x}{n}\right)$

ここで，①②をみたす格子点 $(x,\ y)$ について，直線 $x=k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ 上の個数を N_k とおくと，

$$n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\leqq N_k<n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

①②をみたす格子点の個数 $P(n)$ は，$P(n)=\sum_{k=1}^{n-1}N_k$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\cdots\cdots ①$$

(2) ①より，$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq\frac{P(n)}{n^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\cdots ②$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\log 2}\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\log 2}\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=\frac{1}{\log 2}(2\log 2-1)$$

$$=2-\frac{1}{\log 2}$$

また，$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-\frac{n-1}{n^2}$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

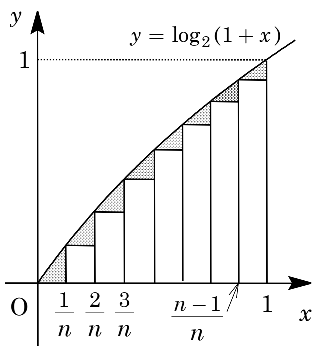
$$=2-\frac{1}{\log 2}$$

したがって，②から，$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}=2-\frac{1}{\log 2}$ である。

(3) $L=2-\frac{1}{\log 2}=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx$ となり，②から，

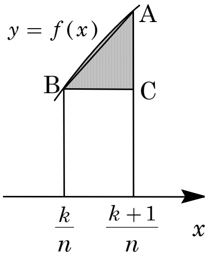
$$L-\frac{P(n)}{n^2}>L-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$



ここで，上式の右辺は，右図の網点部の面積の和になり，この値を S_n とおく。

そこで，$f(x)=\log_2(1+x)$ が単調に増加し，曲線 $y=f(x)$ が上に凸であることに注意すると，$\dfrac{k}{n}\leqq x\leqq\dfrac{k+1}{n}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$ において，右図より，



$$(\text{網点部の面積})>\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

これより，S_n は，

$$S_n>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot f(1)=\frac{1}{2n}$$

以上より，$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ である。

［解　説］

格子点の個数に区分求積法をドッキングし，さらに誤差の評価を組み合わせた盛りだくさんの問題です。ただ，(1)で結論が与えられているので，手のつけようがないものではありません。なお，(3)は図での処理に依存した方法で記しています。