1

解答解説のページへ

座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(2)　(1)で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

1　問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1 \cdots\cdots$①と$C_2 : y = x^3 + 1 \cdots\cdots$②を連立して,

$$x^3 + 1 = x^2 + 2ax - 2a + 1,\ x^3 - x^2 - 2ax + 2a = 0$$

因数分解すると，$(x-1)(x^2 - 2a) = 0 \cdots\cdots\cdots$③

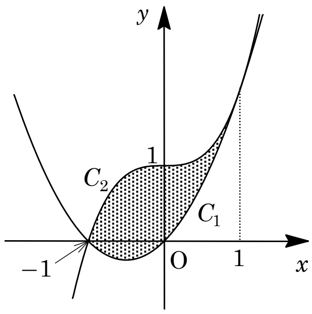
すると，C_1とC_2の共有点が 2 個から，③の異なる実数解は 2 個となる。

そして，$a \neq 0$から$x^2 - 2a = 0$は重解をもたないので，$x^2 - 2a = 0$の解の 1 つが$x = 1$となることが必要である。すなわち，$1 - 2a = 0$から$a = \frac{1}{2}$となる。

このとき，③は$(x-1)(x^2-1) = 0$すなわち$(x-1)^2(x+1) = 0$となるので，C_1とC_2の共有点のx座標は$x = 1,\ -1$となり条件を満たす。

以上より，$a = \frac{1}{2}$である。

(2)　$a = \frac{1}{2}$のとき，C_1は$y = x^2 + x \cdots\cdots$ ①$'$ となり，C_1とC_2で囲まれた部分は右図の網点部となる。



さて，$-1 \leqq x \leqq 0$で$d = |x^3 + 1| - |x^2 + x|$とおくと，

$$d = x^3 + 1 + x^2 + x = (x+1)(x^2+1) \geqq 0$$

これより，$|x^3 + 1| \geqq |x^2 + x|$となるので，網点部を$x$軸のまわりに回転してできる立体の体積$V$は,

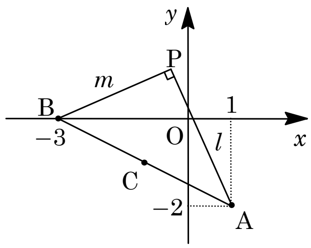
$$V = \pi\int_{-1}^{1}(x^3+1)^2dx - \pi\int_0^1(x^2+x)^2dx$$
$$= 2\pi\int_0^1(x^6+1)dx - \pi\int_0^1(x^4+2x^3+x^2)dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{7}+1\right) - \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{7}\pi - \frac{31}{30}\pi = \frac{263}{210}\pi$$

［解 説］

回転体の体積を求める基本題です。$-1 \leqq x \leqq 0$では，C_1とC_2で囲まれた部分が回転軸の一方の側だけでない点に要注意です。

2

問題のページへ



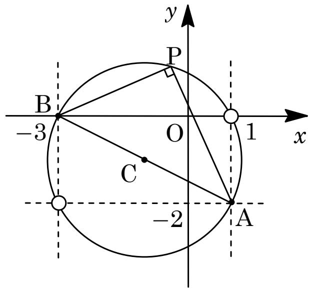
(1)　$l: y=ax-a-2=a(x-1)-2$ ……①は点 A$(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y=bx+3b=b(x+3)$ ……②は点 B$(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして，l と m は直交するので，$ab=-1$ ………③

実数 a, b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 C$(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2+(y+1)^2=5 \text{………④}$$



ただし，①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2)　②③から $m: y=-\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x+ay+3=0$ となり，

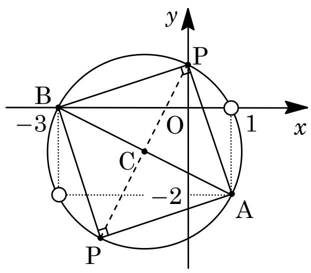
$$\mathrm{AP}=\frac{|1-2a+3|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

また，①から $l: ax-y-a-2=0$ となり，$\mathrm{BP}=\dfrac{|-3a-a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$

(3)　△APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より AP＝BP となり，(2)から，

$$\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}},\quad |2a-4|=|4a+2|$$



(i)　$2a-4=4a+2$ のとき　$2a=-6$ より $a=-3$

(ii)　$2a-4=-(4a+2)$ のとき　$6a=2$ より $a=\dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=-3,\ \dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

3

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ ……①に対して，

$$y' = \sin 3x + 3x\cos 3x + 6x$$

ここで，C 上の点 $(a,\ a\sin 3a + 3a^2)$ における接線 l の方程式は，

$$y - (a\sin 3a + 3a^2) = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)(x - a)$$

$$y = (\sin 3a + 3a\cos 3a + 6a)x - 3a^2(\cos 3a + 1) \cdots\cdots\cdots ②$$

l は原点を通るので，②より $3a^2(\cos 3a + 1) = 0$ となり，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ から，

$$\cos 3a = -1,\ a = \frac{\pi}{3}$$

(2)　$a = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，②は $y = (0 - \pi + 2\pi)x$ となり，$l: y = \pi x$ ………③

①③を連立すると，$x\sin 3x + 3x^2 = \pi x$ となり，

$$x(\sin 3x + 3x - \pi) = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$f(x) = \sin 3x + 3x - \pi$ とおくと，

$$f'(x) = 3\cos 3x + 3 = 3(\cos 3x + 1)$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$f(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{\pi}{3}$ だけである。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

これより，④の解は $x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$ となり，曲線 C と直線 l の共有点の座標は，

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{3}\right)$$

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ において，(2)から $f(x) \leqq 0$ となり，これより $x\sin 3x + 3x^2 - \pi x \leqq 0$

なので，C と l で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x\sin 3x + 3x^2 - \pi x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx - \left[x^3 - \frac{\pi}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{9}\cdot(-1) - \frac{1}{9}\left[\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\pi^3}{27} + \frac{\pi^3}{18} = -\frac{\pi}{9} + \frac{\pi^3}{54} = \frac{\pi}{54}(\pi^2 - 6)$$

［解　説］

微積分の総合問題です。なお，(3)については，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で C と l の上下関係が変わらないので，図は省略しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　まず, 赤球 n 個, 白球 n 個, 合計 $2n$ 個入っている箱から, n 個の球を取り出す ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個$(0 \leqq k \leqq n)$となるのは, ${}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ 通りであり, さらに ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ ……①を考え合わせると, その確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2)　取り出した n 個の球のうち赤球が k 個$(1 \leqq k \leqq n)$となり, さらにゲームに勝つ確率 P_k は, $P_k = \dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であり,

$${}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2\{(n-1)!\}^2} = \frac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

これより, $P_k = \dfrac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^2 ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{\dfrac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{n}{2(2n-1)} \cdot \dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ である。

(3)　ゲームに勝つ確率 P は, $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$ ………②

ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2 = ({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ の値を求めるために,

$(x+1)^{n-1}(x+1)^{n-1} = (x+1)^{2n-2}$ ……③に注意して左辺を展開し, ①を用いると,

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1})({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} x + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_0 x^{n-1})$$

そして, この式の x^{n-1} の係数に着目すると, $({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ となり, また③の右辺を展開したとき, x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ であることより,

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2 = {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1} \text{ ………④}$$

すると, ②④から, $P = \dfrac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}} \cdot {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1} = \dfrac{n}{2(2n-1)}$ である。

［解 説］

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが, 上記の方法は修得しておくことの 1 つです。