1

解答解説のページへ

t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$, $(m-1,\ n)$, $(m-1,\ n-1)$, $(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点zの全体をHとおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1) Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Hの点zに対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。wの絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　4 点 A$(1,\ 5,\ 0)$，B$(4,\ 2,\ 0)$，C$(t,\ 2t,\ t-1)$，D$(1,\ 6,\ 1)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

△ABC が直角三角形になる場合は，

(i)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$(t-1)-(2t-5)=0$ となり $t=4$

(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，$(t-4)-(2t-2)=0$ となり $t=-2$

(iii)　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0,\ 6t^2-21t+15=0$$

よって，$(2t-5)(t-1)=0$ から，$t=\dfrac{5}{2},\ 1$

(i)～(iii)より，求める t の値は，$t=-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4$ となる。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$（$p,\ q$ は実数）であり，

$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=3p(1,\ -1,\ 0)+q(0,\ 1,\ 1)$$

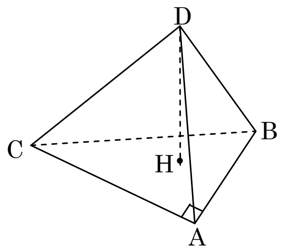
$$t-1=3p\ \cdots\cdots\text{①},\ 2t-5=-3p+q\ \cdots\cdots\text{②},\ t-1=q\ \cdots\cdots\text{③}$$

①③より，$3p=q$ となり，②に代入すると $2t-5=0$ から $t=\dfrac{5}{2}$ である。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき, (1)から $t=4$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3(1,\ 1,\ 1)$ である。

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3\sqrt{1+1+1}=3\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$$



ここで，点 D から平面 ABC に垂線を引き，この垂線と平面 ABC の交点を H とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad(r,\ s\text{ は実数})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3\sqrt{2})^2r+3=18r+3=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3\sqrt{3})^2s-6=27s-6=0$$

これより，$r=-\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{2}{9}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{1}{6}\cdot3(1,\ -1,\ 0)+\frac{2}{9}\cdot3(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=\frac{1}{6}(1,\ 1,\ -2)$$

以上より，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{6}\sqrt{1+1+4}=\dfrac{3}{2}$ となる。

［解　説］

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお，平面の方程式などを利用すると，記述を少し短縮できます。

2　問題のページへ

(1)　初めに$R_{(1,\ 1)}$にあったさいころが，硬貨を5回投げた後に$R_{(3,\ 4)}$に移るには，右に2回，上に3回だけ移動すればよい。

すなわち，硬貨の表が2回，裏が3回出ればよいので，その確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16} $$

(2)　初めに1の目が上で$R_{(1,\ 1)}$にあったさいころが，硬貨を2回投げた後に6の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$または$R_{(1,\ 3)}$に移るときである。

(i)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}$のとき　右に2回すなわち硬貨の表が2回出ればよい。

(ii)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}$のとき　上に2回すなわち硬貨の裏が2回出ればよい。

(i)(ii)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$である。

次に，初めに$R_{(1,\ 1)}$にあったさいころが，硬貨を2回投げた後に6の目が上にあり，しかも5回投げた後に$R_{(3,\ 4)}$に移るには，

(iii)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$のとき

$R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$では，硬貨の裏が3回出ればよい。

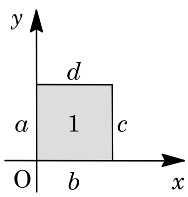
(iv)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$のとき

$R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$では，硬貨の表が2回で裏が1回出ればよい。

(iii)(iv)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2^5}=\frac{1}{8}$である。

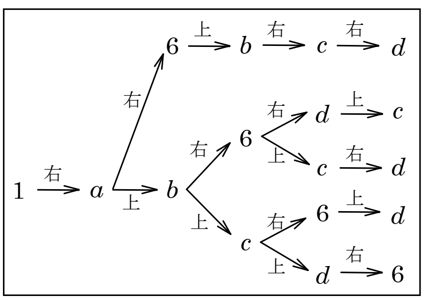
以上より，求める条件付き確率は，$\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$となる。

(3)　さいころの1と6以外の目を$a,\ b,\ c,\ d$ $(a+c=b+d=7)$とおき，初めに$R_{(1,\ 1)}$にあるとき，上から見た配置が右図とする。



そして，硬貨を5回投げたとき，5回目の移動までにさいころの6通りの目がすべて上に現れる場合を考える。

まず，1回目に硬貨が表で右に転がった場合，すなわち上面が$1\to a$と，硬貨が裏で上に転がった場合，すなわち上面が$1\to b$とは対等なので，以下，上面が$1\to a$のときを調べる。



このとき，上面に6通りの目がでるのは，樹形図から，$1\to a\to 6$のときは1通り，$1\to a\to b$のときは4通り，合わせて5通りとなる。

同様に，1回目に硬貨が裏の場合も5通りとなるので，求める確率は，

$$ 5\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16} $$

［解 説］

前半は標準的な確率の問題ですが，(3)はかなり注意力を要します。ここでは，樹形図をもとにチェックしながら解きましたが，時間をかなり費やします。

3

問題のページへ

(1)　複素数平面上で，$\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}(-i)$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$ より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

すると，点 P の描く図形 H は 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

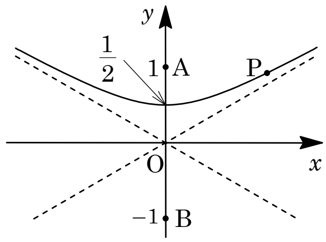
ここで，$z=x+yi$ とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ とすると，$c=1$ かつ $2b=1$ で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$ となり，漸近線は,

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ただし，$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$ より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。



そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が $\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$ で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2)　$w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$ となり，(1)より $|z|\geqq\dfrac{1}{2}$ なので $0<r_2\leqq 2$ である。

また，n を整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$ より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ より $n=1$ として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$ である。

［解 説］

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

4

問題のページへ

(1)　関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}=|x|\sqrt{x+3}\quad(x\geqq -3)$ に対して,

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x+3x^2}{\sqrt{3x^2+x^3}}=\frac{3x(x+2)}{2|x|\sqrt{x+3}}$$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	×	＋	0	－	×	＋
$f(x)$	0	↗	2	↘	0	↗

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(-2)=2$ である。

(2)　$-3\leqq x\leqq 0$ のとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}f(t)\,dt=\int_x^{x+3}|t|\sqrt{t+3}\,dt\cdots\cdots(*)$ に対して,

$$F'(x)=|x+3|\sqrt{x+6}-|x|\sqrt{x+3}=(x+3)\sqrt{x+6}+x\sqrt{x+3}$$
$$=\frac{(x+3)^2(x+6)-x^2(x+3)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}=\frac{(x+3)(x^2+9x+18-x^2)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{9(x+3)(x+2)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}$$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		－	0	＋	
$F(x)$		↘		↗	

$F(x)$ の増減は右表のようになり，以下，$F(-3)$，$F(-2)$，$F(0)$ の値を求める。

さて，$(*)$から，$F(x)=\displaystyle\int_x^0 -t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3}t\sqrt{t+3}\,dt$

ここで，$u=\sqrt{t+3}$ とおくと，$t=u^2-3$ となり，$dt=2u\,du$ から,

$$F(x)=\int_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}}-(u^2-3)u\cdot 2u\,du+\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}(u^2-3)u\cdot 2u\,du$$
$$=-\int_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}}(2u^4-6u^2)\,du+\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}(2u^4-6u^2)\,du$$
$$=-\left[\frac{2}{5}u^5-2u^3\right]_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}}+\left[\frac{2}{5}u^5-2u^3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}$$
$$=-\frac{2}{5}\{9\sqrt{3}-(x+3)^2\sqrt{x+3}\}+2\{3\sqrt{3}-(x+3)\sqrt{x+3}\}$$
$$+\frac{2}{5}\{(x+6)^2\sqrt{x+6}-9\sqrt{3}\}-2\{(x+6)\sqrt{x+6}-3\sqrt{3}\}$$
$$=\frac{24}{5}\sqrt{3}+\frac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3}+\frac{2}{5}(x+1)(x+6)\sqrt{x+6}$$

これより，$F(-3)=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}$，$F(-2)=\dfrac{24}{5}\sqrt{3}-\dfrac{24}{5}$，$F(0)=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}+\dfrac{12}{5}\sqrt{6}$

よって，$F(x)$ の最大値は $\dfrac{12}{5}\sqrt{3}+\dfrac{12}{5}\sqrt{6}$，最小値は $\dfrac{24}{5}\sqrt{3}-\dfrac{24}{5}$ である。

［解　説］

定積分の計算問題ですが，内容は基本的ですが，計算がやや難です。$F(x)$ を求める際に，置換の代わりに被積分関数を変形しても構いません。同じことですが。