

1[解答例のページへ](#)

a を実数とする。 $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつとする。このとき、 a の値を求め、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- (2) a の値を(1)で求めたものとする。関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

2

[解答例のページへ](#)

実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を k とするとき、 $a - k$ を a の小数部分という。 n を自然数とし、 $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $a_n < n + 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) b_n を a_n の小数部分とする。 b_n を n を用いて表せ。
- (3) b_n を(2)で定めたものとする。 m, n を異なる2つの自然数とすると、 $b_m \neq b_n$ であることを示せ。

3

解答例のページへ

1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき、出た目の数を順に a, b とおく。座標平面上の 2 点 A, B を、 $A\left(\cos\frac{a}{6}\pi, \sin\frac{a}{6}\pi\right)$, $B\left(\cos\frac{b+6}{6}\pi, \sin\frac{b+6}{6}\pi\right)$ とし、原点を O とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 O, A, B が一直線上にある確率を求めよ。
- (2) 3 点 O, A, B が一直線上になく、かつ三角形 OAB の面積が $\frac{1}{4}$ 以下である確率を求めよ。
- (3) 2 点 A, B 間の距離が 1 より大きい確率を求めよ。

1

問題のページへ

a を実数とし、 $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ とおく。

- (1) $f(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつので、 $f(-1) = -2 + a - 1 = 0$ から $a = 3$ となり、

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)(2x^2 + x - 1) = (x+1)^2(2x-1)$$

これより、 $f(x) = 0$ の解は、 $x = -1, \frac{1}{2}$ である。

- (2) $a = 3$ のとき、 $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$ となる。

これより、 $f(x)$ の増減は右表のようになり、 $f(x)$ は $x = -1$ のとき極大値 0 、 $x = 0$ のとき極小値 -1 をもつ。

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗

- (3) $f'(x) = 6x^2 + 2ax = 2x(3x + a)$ から、

- (i) $a = 0$ のとき $f'(x) = 6x^2 \geq 0$ から $f(x)$ は単調に増加する。

すると、 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことはない。

- (ii) $a \neq 0$ のとき $f(x)$ は $x = 0, -\frac{a}{3}$ で極値をもち、 $f(0) = -1 < 0$ に注意すると、

- (ii-i) $a > 0$ のとき

$f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつ

条件は、 $f(-\frac{a}{3}) > 0$ から、

$$-\frac{2}{27}a^3 + \frac{a^3}{9} - 1 > 0, \quad a^3 - 27 > 0$$

$a > 0$ から、 $a > 3$ である。

x	...	$-\frac{a}{3}$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘	-1	↗

- (ii-ii) $a < 0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり、 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことはない。

x	...	0	...	$-\frac{a}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘		↗

- (i)(ii) より、 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は、 $a > 3$ である。

[コメント]

微分と増減についての基本題です。(3)の(ii)の場合は $f(0) \cdot f(-\frac{a}{3}) < 0$ として処理をしても構いません。

2

問題のページへ

- (1) n を自然数として, $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ のとき,

$$a_n^2 - (n+1)^2 = (n^2 + 1) - (n^2 + 2n + 1) = -2n < 0$$

これより, $a_n^2 < (n+1)^2$ となり, $a_n < n+1$ が成り立つ。

- (2) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2} = n$ から, (1) と合わせると, $n < a_n < n+1$ である。

すると, a_n を超えない最大の整数は n となり, a_n の小数部分 b_n は,

$$b_n = a_n - n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

- (3) 2 つの自然数 m, n に対して, $b_m = b_n$ とすると,

$$\sqrt{m^2 + 1} - m = \sqrt{n^2 + 1} - n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \frac{(m^2 + 1) - m^2}{\sqrt{m^2 + 1} + m} = \frac{(n^2 + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \text{ となり, } \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} + m} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \text{ より,}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} + m = \sqrt{n^2 + 1} + n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $2m = 2n$ から $m = n$ である。

したがって, 「 $b_m = b_n$ ならば $m = n$ 」が成り立ち, 対偶を考えると「 $m \neq n$ ならば $b_m \neq b_n$ 」である。

[コメント]

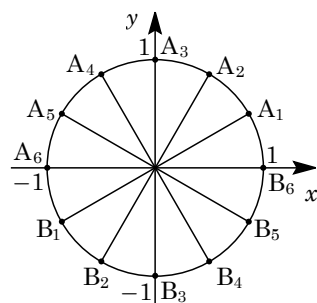
整数部分と小数部分についての問題です。(3)はいろいろな証明が可能ですが, 解答例では, 分子の有理化という手法と対偶を組み合わせた方法で記述しました。

3

問題のページへ

さいころを2回続けて投げ、出た目を順に a, b とおく。

原点を O とする座標平面上で、2点 $A\left(\cos\frac{a}{6}\pi, \sin\frac{a}{6}\pi\right)$, $B\left(\cos\frac{b+6}{6}\pi, \sin\frac{b+6}{6}\pi\right)$ に対し、 $k=1, 2, \dots, 6$ として $a=k$ のとき点 A を A_k , $b=k$ のとき点 B を B_k とおく。図示すると右図のようになる。



(1) 3点 O, A, B が一直線上にあるのは、

$$(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

すると、このときの確率は $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ である。

(2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \sin \angle AOB$ より、3点 O, A, B が一直線上になく、かつ $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{4}$ 以下であるのは、 $0 < \frac{1}{2} \sin \angle AOB \leq \frac{1}{4}$ から、

$$0 < \sin \angle AOB \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$\angle AOB = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ から、 $\textcircled{1}$ を満たすのは、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で、

(i) $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ のとき $(a, b) = (1, 6), (6, 1)$ の2通りの場合がある。

(ii) $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$ のとき

$(a, b) = (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$ の10通りの場合がある。

(i)(ii)より、求める確率は $\frac{2+10}{6^2} = \frac{1}{3}$ である。

(3) $\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると、

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos \angle AOB = 2 - 2 \cos \angle AOB$$

2点 A, B 間の距離が1以下であるのは、 $2 - 2 \cos \angle AOB \leq 1$ から、

$$\cos \angle AOB \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ を満たすのは、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ で、

(i) $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ のとき (2) から、2通りの場合がある。

(ii) $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ のとき

$(a, b) = (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$ の4通りの場合がある。

(i)(ii)より、2点 A, B 間の距離が1以下の確率は、 $\frac{2+4}{6^2} = \frac{1}{6}$ である。

すると、2 点 A, B 間の距離が 1 より大きい確率は、 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ である。

[コメント]

丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。(3)は余事象で考えています。