1

解答解説のページへ

各項が正である数列$\{a_n\}$を次のように定める。a_1は関数$y=\dfrac{1}{3}x^3-10x\ (x\geqq 0)$が最小値をとるときの x の値とする。a_{n+1}は関数$y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx\ (x\geqq 0)$が最小値をとるときの$x$の値とする。数列$\{b_n\}$を$b_n=\log_{10}a_n$で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1とb_1を求めよ。

(2)　a_{n+1}をa_nを用いて表せ。

(3)　b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(4)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(5)　$\dfrac{a_1a_2a_3}{100}$の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ。

(2)　1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ。

(3)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c\,,\ \ l_1 : y = -3x + 3\,,\ \ l_2 : y = x + 3$$

で定める。l_1，l_2 がともに C に接するとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を求めよ。また c を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　C と l_1 の接点を P，C と l_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする。a が(2)の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^3-10x\ (x\geqq 0)$ に対し，$y'=x^2-10$

すると，$x\geqq 0$ における y の値は，増減が右表のようになり，$x=\sqrt{10}$ で最小値をとるので，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$$a_1=\sqrt{10}\text{，}\ b_1=\log_{10}a_1=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

(2)　$a_n>0$ のとき，$y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx\ (x\geqq 0)$ に対し，

$$y'=x^2-10a_n$$

すると，$x\geqq 0$ における y の値は，増減が右表のようになり，$x=\sqrt{10a_n}$ で最小値をとるので，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10a_n}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$$a_{n+1}=\sqrt{10a_n}$$

(3)　(2)より，$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}=\dfrac{1}{2}(1+\log_{10}a_n)$ となり，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n+1)$

(4)　(3)より，$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(b_n-1)$ と変形すると，$b_1=\dfrac{1}{2}$ から，

$$b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより，$b_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

(5)　$P=\dfrac{a_1a_2a_3}{100}$ とおくと，(4)から，

$$\log_{10}P=\log_{10}\frac{a_1a_2a_3}{100}=\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3-2=b_1+b_2+b_3-2$$
$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)-2=\frac{1}{8}$$

すると，$P=10^{\frac{1}{8}}$ から $\dfrac{a_1a_2a_3}{100}=10^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{10}$ となる。

［解 説］

微分法の絡んだ漸化式の基本的な問題です。設問の流れから，(5)は(4)の結果を利用しています。

2

問題のページへ

(1)　サイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるのは, n が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の公倍数のときである。その最小のものは, 1, 2, 3, 2^2, 5, $2\cdot 3$ の最小公倍数であり,

$$2^2\times 3\times 5=60$$

(2)　サイコロを投げて出た目が n の約数となる場合について,

(i)　2, 3, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(ii)　1, 3, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(iii)　1, 2, 4, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

(iv)　1, 2, 3, 5, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 30 の倍数

(v)　1, 2, 3, 4, 6 の公倍数のとき　n は最小公倍数 12 の倍数

(vi)　1, 2, 3, 4, 5 の公倍数のとき　n は最小公倍数 60 の倍数

すると, (i)(ii)(iii)(vi)のとき, (1)から出た目が 60 の約数となる確率は 1 である。(iv)のとき出た目が 30 の約数となる確率は $\dfrac{5}{6}$ である。(v)のとき出た目が 12 の約数となる確率は $\dfrac{5}{6}$ である。

よって, 出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ の n のうち, 最小のものは 12 である。

(3)　サイコロを 3 回投げて出た目の積が $20=2^2\times 5$ の約数となる確率は,

・積が 1 のとき　$1\times 1\times 1$ から, 確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{6^3}$

・積が 2 のとき　$1\times 1\times 2$ から, 確率は $\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{3}{6^3}$

・積が 4 のとき　$1\times 1\times 4$, $1\times 2\times 2$ から, 確率は $\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{6}{6^3}$

・積が 5 のとき　$1\times 1\times 5$ から, 確率は $\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{3}{6^3}$

・積が 10 のとき　$1\times 2\times 5$ から, 確率は $3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{6}{6^3}$

・積が 20 のとき　$1\times 4\times 5$, $2\times 2\times 5$ から, 確率は $3!\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{9}{6^3}$

以上より, 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる確率は,

$$\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^3}+\frac{6}{6^3}+\frac{3}{6^3}+\frac{6}{6^3}+\frac{9}{6^3}=\frac{28}{6^3}=\frac{7}{54}$$

［解　説］

ミスに要注意という丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。

3

問題のページへ

(1)　$C: y=ax^2+bx+c$ ……①，$l_1: y=-3x+3$ ……②，$l_2: y=x+3$ ……③に対し，

$a\neq 0$ において①②を連立すると，$ax^2+bx+c=-3x+3$ となり，

$$ax^2+(b+3)x+c-3=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

C と l_1 が接することより，$D=(b+3)^2-4a(c-3)=0$ ………⑤

$a\neq 0$ において①③を連立すると，$ax^2+bx+c=x+3$ となり，

$$ax^2+(b-1)x+c-3=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

C と l_2 が接することより，$D=(b-1)^2-4a(c-3)=0$ ………⑦

⑤⑦より，$(b+3)^2-(b-1)^2=0$ となり，$4(2b+2)=0$ から $b=-1$

⑤に代入して $4-4a(c-3)=0$ となり，$a(c-3)=1$ から $c=\dfrac{1}{a}+3$

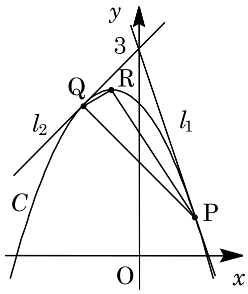
(2)　(1)から，$C: y=ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3$ となり，C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，

$ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3=0$ は異なる 2 実数解をもつので，$D=1-4a\left(\dfrac{1}{a}+3\right)>0$ から，

$$-3-12a>0,\ a<-\frac{1}{4}$$

よって，$-4<\dfrac{1}{a}<0$ である。

(3)　$C: y=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+\dfrac{3}{4a}+3$ より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{4a}+3\right)$



接点 P の x 座標は④の重解より，$x=-\dfrac{b+3}{2a}=-\dfrac{1}{a}$ となり，

②から $y=-3\left(-\dfrac{1}{a}\right)+3=\dfrac{3}{a}+3$ なので，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}+3\right)$

接点 Q の x 座標は⑥の重解より，$x=-\dfrac{b-1}{2a}=\dfrac{1}{a}$ となり，

③から $y=\dfrac{1}{a}+3$ なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}+3\right)$

したがって，△PQR の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ に対して，

$$x=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{6a},\ \ y=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+3+\frac{1}{a}+3+\frac{3}{4a}+3\right)=\frac{19}{12a}+3$$

すると，$-4<\dfrac{1}{a}<0$ から $-\dfrac{2}{3}<x<0$ となり，また $y=\dfrac{19}{2}\cdot\dfrac{1}{6a}+3=\dfrac{19}{2}x+3$ なので，G の軌跡は線分 $y=\dfrac{19}{2}x+3\ \left(-\dfrac{2}{3}<x<0\right)$ である。

［解　説］

放物線と直線を題材にした軌跡の基本題です。