1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，それらがともに -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える。

2

解答解説のページへ

A, B の 2 人が，はじめに，A は 2 枚の硬貨を，B は 1 枚の硬貨を持っている。2 人は次の操作(P)を繰り返すゲームを行う。

(P)　2 人は持っている硬貨すべてを同時に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の枚数を数え，その枚数の少ない方が相手に 1 枚の硬貨を渡す。表が出た硬貨の枚数が同じときは硬貨のやりとりは行わない。

操作(P)を繰り返し，2 人のどちらかが持っている硬貨の枚数が 3 枚となった時点でこのゲームは終了する。操作(P)を n 回繰り返し行ったとき，A が持っている硬貨の枚数が 3 枚となってゲームが終了する確率を p_n とする。ただし，どの硬貨も 1 回投げたとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　p_1 の値を求めよ。

(2)　p_2 の値を求めよ。

(3)　p_3 の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = a,\ \ C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

が異なる 2 点 A, B で交わっているとする。直線 AB が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(p,\ 0)$, $(0,\ q)$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) p, q の値を a を用いて表せ。

(3) p, q の値がともに整数となるような a の値をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対し，$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフの頂点が $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$ であることに注意して，

$$-\frac{a}{2}>0,\ -\frac{a^2}{4}+b<0,\ f(0)=b>0$$

まとめると，$a<0$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ である。

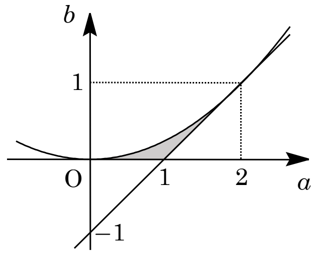
(2)　$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，それらがともに -1 より大きく，0 より小さくなる条件は，

$$-1<-\frac{a}{2}<0,\ -\frac{a^2}{4}+b<0,\ f(-1)=1-a+b>0,\ f(0)=b>0$$

まとめると，$0<a<2$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ かつ $b>a-1$ である。

ここで，2 つの境界線 $b=\dfrac{a^2}{4}$ と $b=a-1$ の関係は，連立すると $\dfrac{a^2}{4}=a-1$ から $\dfrac{1}{4}(a-2)^2=0$ となることより，$a=2$ で接している。

したがって，点 $(a,\ b)$ は右図の網点部に存在する。ただし，境界は含まない。



(3)　$f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなる条件は，

(i)　異なる実数解をもつ $\left(b<\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

(2)より，$0<a<2$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ かつ $b>a-1$ である。

(ii)　重解をもつ $\left(b=\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-1<-\dfrac{a}{2}<0$ より，$0<a<2$ かつ $b=\dfrac{a^2}{4}$ である。

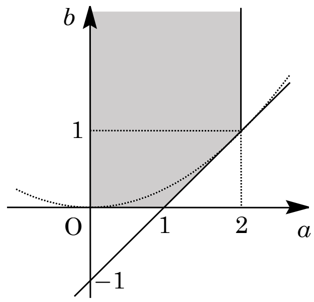
(iii) 虚数解をもつ $\left(b>\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ から $-1<-\dfrac{a}{2}<0$ となり，

$$0<a<2 \text{ かつ } b>\frac{a^2}{4}$$

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ は右図の網点部に存在する。

ただし，境界は含まない。



［解　説］

2 次方程式の解の配置の問題です。(3)では，問題文の「解の実部」という表現により，場合分けをしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 1枚の硬貨を投げ，表が1枚, 0枚と出る確率はそれぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$であり, 2枚の硬貨を投げ，表が2枚, 1枚, 0枚と出る確率はそれぞれ$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$である。そして，はじめにAは2枚の硬貨，Bは1枚の硬貨を持っている。

さて，操作(P)を1回行った後，Aが持っている硬貨が2枚→3枚となるのは，A, Bの投げた硬貨の表の枚数が$(A,\ B)=(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$のときである。

その確率p_1は，$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$である。

(2) 操作(P)を1回行った後, Aが持っている硬貨が2枚→2枚となるのは, A, Bの投げた硬貨の表の枚数が$(A,\ B)=(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$のときである。

その確率は$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$となり，操作(P)を2回行ったときAが持っている硬貨が3枚になる(2枚→2枚→3枚)の確率p_2は，$p_2=\frac{3}{8}p_1=\frac{3}{16}$である。

(3) 操作(P)を1回行った後, Aが持っている硬貨が2枚→1枚となるのは, A, Bの投げた硬貨の表の枚数が$(A,\ B)=(0,\ 1)$のときで，その確率は$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$である。

さて，操作(P)を3回行った後，Aが持っている硬貨が3枚になるのは，Aの持っている硬貨の枚数の変化について，

(i) 2枚→1枚→2枚→3枚のとき

1枚→2枚となるのは，投げた硬貨の表の枚数について，$(A,\ B)=(1,\ 0)$のときで，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$である。

すると，この場合の確率は，$\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times p_1=\frac{1}{128}$である。

(ii) 2枚→2枚→2枚→3枚のとき

この場合の確率は，$\frac{3}{8}\times p_2=\frac{9}{128}$である。

(i)(ii)より，求める確率p_3は，$p_3=\frac{1}{128}+\frac{9}{128}=\frac{5}{64}$である。

［解　説］

読解力の要求される確率問題です。ケアレスミスに要注意です。

3

問題のページへ

(1)　2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=a$ ……①，$C_2 : x^2+y^2-6x-4y+3=0$ ……②が異なる 2 点 A, B で交わっているとき，②は $(x-3)^2+(y-2)^2=10$ となり，C_1 と C_2 の中心間距離は $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ であるので，

$$\left|\sqrt{a}-\sqrt{10}\right|<\sqrt{13}<\sqrt{a}+\sqrt{10} \text{ ………③}$$

すると，$\left|\sqrt{a}-\sqrt{10}\right|<\sqrt{13}$ から $\sqrt{10}-\sqrt{13}<\sqrt{a}<\sqrt{10}+\sqrt{13}$ となり，

$$a<(\sqrt{10}+\sqrt{13})^2=23+2\sqrt{130}$$

また，$\sqrt{13}<\sqrt{a}+\sqrt{10}$ から $\sqrt{a}>\sqrt{13}-\sqrt{10}$ となり，

$$a>(\sqrt{13}-\sqrt{10})^2=23-2\sqrt{130}$$

③より，$23-2\sqrt{130}<a<23+2\sqrt{130}$ である。

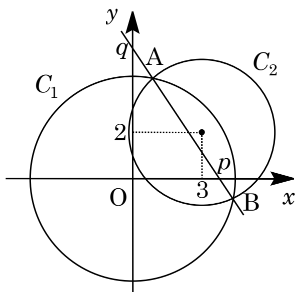
(2)　C_1 と C_2 の共通弦 AB の方程式は，①－②から，

$$6x+4y-3=a\,,\ \ 6x+4y=a+3 \text{ ………④}$$

直線④が，2 点 $(p,\ 0)$，$(0,\ q)$ を通るので，

$$6p=a+3\,,\ \ 4q=a+3$$

よって，$p=\dfrac{a+3}{6}$ ……⑤，$q=\dfrac{a+3}{4}$ ……⑥



(3)　p，q の値がともに整数なので，⑤⑥より，$a+3$ は 6 と 4 の公倍数，すなわち 12 の倍数である。

ここで，(1)の結果から，$26-2\sqrt{130}<a+3<26+2\sqrt{130}$ ………⑦

さて，$2\sqrt{130}=\sqrt{520}$ から $22<\sqrt{520}<23$ なので，

$$3<26-2\sqrt{130}<4\,,\ \ 48<26+2\sqrt{130}<49$$

すると，⑦をみたす $a+3$ の値は，$a+3=12,\ 24,\ 36,\ 48$ となり，

$$a=9,\ 21,\ 33,\ 45$$

［解　説］

2 円の関係に整数を加味した問題です。(1)(2)をもとに(3)という流れです。