1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数nについて$a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を$b_n=\log a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。b_nの値を n を用いて表せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

2

解答解説のページへ

m を 3 以上の自然数，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする。円 C_1 に内接する（すべての頂点が C_1 上にある）正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する（P_1 のすべての辺と接する）円を C_2 とする。同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする。C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) r_n，s_n の値を θ, n を用いて表せ。

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m)$ を求めよ。

ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ を用いてよい。

3

解答解説のページへ

a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $f(1)=0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) s, t の値を a を用いて表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) t の値を s を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

a, b を実数, p を素数とし, $1 < a < b$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) x, y, z を 0 でない実数とする。$a^x = b^y = (ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2) $m,\ n$ を $m > n$ をみたす自然数とし, $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ とする。$m,\ n$ の値を p を用いて表せ。

(3) m, n を自然数とし, $a^m = b^n = (ab)^p$ とする。b の値を a, p を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ によって定められた数列$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}\cdot\sqrt{a_{n+1}}\ ,\ \ a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}}=a_{n+1}\sqrt{a_n}$$

これより，$a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_2\sqrt{a_1}=2$ となり，$a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ である。

(2)　(1)より，$\log a_{n+1}=\log\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}=\log 2-\dfrac{1}{2}\log a_n$ となり，$b_n=\log a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=\log 2-\frac{1}{2}b_n\ ,\ \ b_{n+1}-\frac{2}{3}\log 2=-\frac{1}{2}\Big(b_n-\frac{2}{3}\log 2\Big)$$

これより，$b_1=\log a_1=0$ なので,

$$b_n-\frac{2}{3}\log 2=\Big(b_1-\frac{2}{3}\log 2\Big)^{n-1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)=-\frac{2}{3}(\log 2)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

よって，$b_n=\dfrac{2}{3}\log 2-\dfrac{2}{3}(\log 2)\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}=\dfrac{2}{3}(\log 2)\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}$ である。

(3)　(2)から，$a_n=e^{b_n}=e^{\frac{2}{3}(\log 2)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{2}{3}(\log 2)}=e^{\log 2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$$

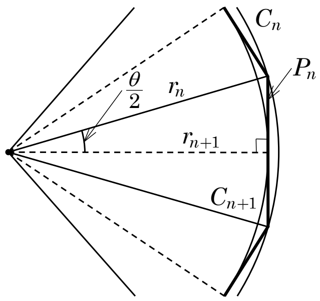
［解　説］

誘導のついた隣接 3 項間型漸化式の問題ですが，誘導なしでもよいぐらいのタイプです。ただ，対数の底は 2 の方が初期条件と相性はよいのですが。

© 電送数学舎 2022

2

問題のページへ



(1)　$m \geqq 3$として，円C_nに内接する正 m 角形をP_nとし，P_nに内接する円をC_{n+1}とする。そして，C_nの半径をr_n，C_nの内側でP_nの外側の部分の面積をs_nとおく。

ここで，$r_1=1$，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$とすると，

$$r_{n+1}=r_n\cos\frac{\theta}{2}$$

これより，$r_n=r_1\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{n-1}=\cos^{n-1}\dfrac{\theta}{2}$

$$s_n=\left\{\frac{1}{2}r_n^2\theta-\frac{1}{2}r_n^2\sin\theta\right\}m=\frac{1}{2}r_n^2(\theta-\sin\theta)\cdot\frac{2\pi}{\theta}=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}\cos^{2(n-1)}\frac{\theta}{2}$$

(2)　$0<\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{m}\leqq\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$より，$0<\cos^2\dfrac{\theta}{2}<1$となるので，

$$f(m)=\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta}\cdot\frac{1}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(3)　$m\to\infty$のとき，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}\to+0$となり，

$$\lim_{m\to\infty}f(m)=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi(\theta-\sin\theta)}{\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}=\pi\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot4=\frac{1}{6}\cdot1\cdot4\pi=\frac{2}{3}\pi$$

［解　説］

数列の極限の図形への応用問題です。立式に難しいところはありません。

© 電送数学舎 2022

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2\ (0<a<1)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-2ax=\frac{2x-2ax(1+x^2)}{1+x^2}=-\frac{2x(ax^2+a-1)}{1+x^2}$$

$f'(x)=0$ は，$x=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ を解にもち，$p=\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

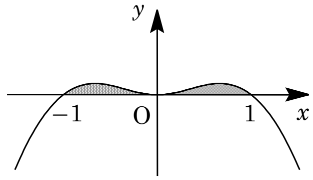
x	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘	0	↗		↘

これより，極小値は $f(0)=0$，極大値は，

$$f(\pm p)=\log\left(1+\frac{1-a}{a}\right)-a\cdot\frac{1-a}{a}=\log\frac{1}{a}-1+a=a-\log a-1$$

(2)　$f(1)=0$ より $\log 2-a=0$ となり，$a=\log 2$ である。

すると $f(x)=\log(1+x^2)-x^2\log 2$ から，$f(\pm 1)=0$ となる。ここで，$f(-x)=f(x)$ から，曲線 $y=f(x)$ は y 軸対称になり，x 軸とで囲まれた図形の面積 S は，



$$S=2\int_0^1\{\log(1+x^2)-x^2\log 2\}dx=2\int_0^1\log(1+x^2)dx-2(\log 2)\int_0^1 x^2dx$$

$$=2\int_0^1\log(1+x^2)dx-\frac{2}{3}\log 2$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^1\log(1+x^2)dx$ とし，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\left[x\log(1+x^2)\right]_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\log 2-\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\log 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\log 2-2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\log 2-2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\log 2-2+2\cdot\frac{\pi}{4}=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$$

よって，$S=2\left(\log 2-2+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{2}{3}\log 2=\dfrac{4}{3}\log 2+\pi-4$ となる。

[解 説]

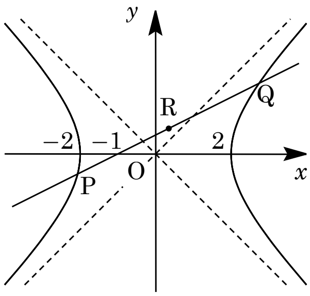
定積分と面積についての標準的な問題です。計算も難しくはありません。

© 電送数学舎 2022

4

問題のページへ

(1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ……①と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ ……②



が異なる 2 点 P, Q で交わる条件は，①②を連立して，

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(\sqrt{a}x+\sqrt{a})^2}{4}=1,\ \ x^2-a(x+1)^2=4$$

$$(a-1)x^2+2ax+a+4=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$a>0$ において，③が異なる 2 実数解をもつ条件は，

$$a-1\neq 0,\ \ D/4=a^2-(a-1)(a+4)>0$$

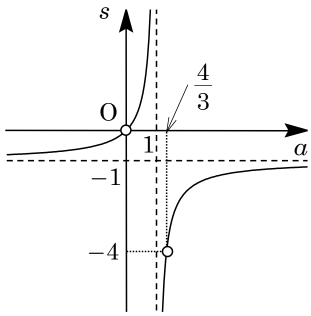
すると，求める a の値の範囲は $a\neq 1$ かつ $-3a+4>0$ から，

$$0<a<1,\ \ 1<a<\frac{4}{3}$$

(2)　$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{a}p+\sqrt{a})$，$\mathrm{Q}(q,\ \sqrt{a}q+\sqrt{a})$ とし，線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とすると，

$$s=\frac{p+q}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a-1}=-\frac{a}{a-1},\ \ t=\sqrt{a}s+\sqrt{a}=-\frac{a\sqrt{a}}{a-1}+\sqrt{a}=-\frac{\sqrt{a}}{a-1}$$

(3)　(2)より，$s=-1-\dfrac{1}{a-1}$ となり，そのグラフを as 平面上に図示にすると右図のようになる。



ここで，(1)から，$0<a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$ なので，

$$s<-4,\ \ 0<s$$

(4)　(2)から $s=\sqrt{a}t$ となり，$\sqrt{a}=\dfrac{s}{t}$ より $a=\dfrac{s^2}{t^2}$ ………④

また，$(a-1)s=-a$ なので $(s+1)a=s$ となり，④を代入すると，

$$(s+1)\frac{s^2}{t^2}=s,\ \ t^2=s(s+1)=s^2+s$$

(i)　$0<a<1\ (s>0)$ のとき　$t>0$ から，$t=\sqrt{s^2+s}$

(ii)　$1<a<\dfrac{4}{3}\ (s<-4)$ のとき　$t<0$ から，$t=-\sqrt{s^2+s}$

［解 説］

双曲線と直線を題材にした軌跡の問題です。文系に，双曲線を円として，同じ構図の出題がありました。

© 電送数学舎 2022

5

問題のページへ

(1)　$1<a<b$ のとき，$a^x=b^y=(ab)^z=k$ とおくと，

$$x=\log_a k\,,\ \ y=\log_b k\,,\ \ z=\log_{ab} k$$

x, y, z は 0 でない実数なので，k は 1 でない正の実数となり，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_a k}+\frac{1}{\log_b k}=\log_k a+\log_k b=\log_k ab=\frac{1}{\log_{ab} k}=\frac{1}{z}$$

(2)　m, n が $m>n$ をみたす自然数，p が素数のとき，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ に対して，

$$pn+pm=mn\,,\ \ mn-pm-pn=0\,,\ \ (m-p)(n-p)=p^2$$

$m>n>0$ から，$m-p>n-p>-p$ となり，$(m-p,\ n-p)=(p^2,\ 1)$ より，

$$(m,\ n)=(p^2+p,\ p+1)$$

(3)　$1<a<b$ で自然数 m, n に対し，$a^m=b^n=(ab)^p$ のとき，(1)より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$

そして，$b^n=a^m<b^m$ から $m>n$ なので，(2)より，

$$(m,\ n)=(p^2+p,\ p+1)$$

すると，$a^{p^2+p}=b^{p+1}=(ab)^p$ となり，$b^{p+1}=a^pb^p$ から，

$b=a^p$　（このとき $a^{p^2+p}=b^{p+1}$ は成立している）

［解 説］

不定方程式に指数・対数を加味した頻出題です。丁寧すぎるほどの誘導です。文系では，$p=5$ の場合が出題されています。

© 電送数学舎 2022