1

解答解説のページへ

a を正の実数とする。$x \geqq 0$ のとき $f(x)=x^2$，$x<0$ のとき $f(x)=-x^2$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C, 直線 $y=2ax-1$ を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) C と l の共有点の個数を求めよ。

(2) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつとする。C と l で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を正の実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x-2\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) s,t の値を a を用いて表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) t の値を s を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$1<a<b$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x,\ y,\ z$ を 0 でない実数とする。$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2)　$m,\ n$ を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ とする。$m,\ n$ の値を求めよ。

(3)　$m,\ n$ を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^5$ とする。b の値を a を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき $f(x)=x^2$，$x<0$ のとき $f(x)=-x^2$ である曲線 $C: y=f(x)$ と，直線 $l: y=2ax-1$ $(a>0)$ を連立すると，$f(x)=2ax-1$ ……(＊)となり，

(i)　$x \geqq 0$ のとき　(＊)から $x^2=2ax-1$ となり，$x^2-2ax+1=0$

$x \geqq 0$ における C と l の共有点は，$D/4=a^2-1$ から，

・$a^2-1<0$ $(0<a<1)$ のとき　共有点は 0 個

・$a^2-1=0$ $(a=1)$ のとき　$x=1$ から，共有点は 1 個

・$a^2-1>0$ $(a>1)$ のとき　$x=a\pm\sqrt{a^2-1}$ はともに正より，共有点は 2 個

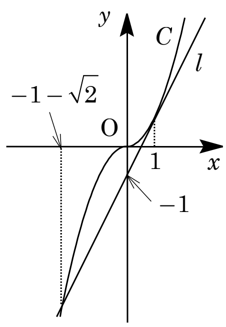
(ii)　$x<0$ のとき　(＊)から $-x^2=2ax-1$ となり，$x^2+2ax-1=0$

$x<0$ における C と l の共有点は $x=-a-\sqrt{a^2+1}$ より，その個数は 1 個である。

(i)(ii)より，C と l の共有点の個数は，

$0<a<1$ のとき 1 個，$a=1$ のとき 2 個，$a>1$ のとき 3 個

(2) C と l が 2 個の共有点をもつのは，(1)より $a=1$ のときであり，このとき $l: y=2x-1$ となる。



また，$x \geqq 0$ における共有点は $x=1$，$x<0$ における共有点は $x=-1-\sqrt{2}$ となり，C と l で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{-1-\sqrt{2}}^{0}\{-x^2-(2x-1)\}dx+\int_{0}^{1}\{x^2-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1-\sqrt{2}}^{0}\{-(x+1)^2+2\}dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}(x+1)^3+2x\Big]_{-1-\sqrt{2}}^{0}+\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_{0}^{1}$$

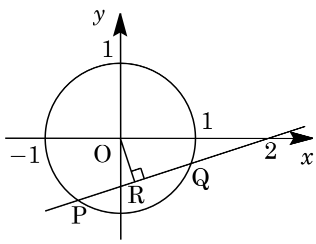
$$=-\frac{1}{3}(1+2\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2})+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{2}+2$$

［解 説］

定積分と面積についての基本題です。(1)は計算主体で記述しましたが，C と l が接する場合について調べ，図から判断してもよいでしょう。

2

問題のページへ



(1)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x-2\sqrt{a}\ (a>0)$ ……①が異なる 2 点で交わる条件は, ①を $\sqrt{a}x-y-2\sqrt{a}=0$ とし, 円の中心 $(0,\ 0)$ との距離が半径 1 より小から,

$$\frac{|-2\sqrt{a}|}{\sqrt{a+1}}<1,\ 2\sqrt{a}<\sqrt{a+1},\ 4a<a+1$$

すると, $a<\frac{1}{3}$ となり, $a>0$ より $0<a<\frac{1}{3}$ である。

(2)　線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とすると, $\mathrm{OR}\perp\mathrm{PQ}$ から, $\mathrm{OR}: y=-\frac{1}{\sqrt{a}}x$ ………②

①②を連立して, $\sqrt{a}x-2\sqrt{a}=-\frac{1}{\sqrt{a}}x$ となり, $ax-2a=-x$ から,

$$x=\frac{2a}{a+1},\ y=-\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2a}{a+1}=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

よって, $s=\frac{2a}{a+1}$ ……③, $t=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ ……④である。

(3)　③から $s=2-\frac{2}{a+1}$ となり, $0<a<\frac{1}{3}$ より $\frac{3}{2}<\frac{2}{a+1}<2$ なので,

$$0<2-\frac{2}{a+1}<\frac{1}{2},\ 0<s<\frac{1}{2}$$

(4)　③④から $s=-\sqrt{a}t$ となり, $-\sqrt{a}=\frac{s}{t}$ から $a=\frac{s^2}{t^2}$ ………⑤

すると, ③から $(a+1)s=2a$ なので, $(s-2)a=-s$ となり, ⑤より,

$$(s-2)\frac{s^2}{t^2}=-s,\ t^2=-s(s-2)=2s-s^2$$

よって, $t<0$ から, $t=-\sqrt{2s-s^2}$ となる。

［解 説］

円と直線を題材にした軌跡の問題です。解答例では数式処理を主体として記しましたが, 図形的に, 点 R の軌跡が原点と点 $(2,\ 0)$ を結ぶ線分を直径とする円の一部であることを利用すると, ほとんど計算は不要となります。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　$1<a<b$ のとき，$a^x=b^y=(ab)^z=k$ とおくと，

$$x=\log_a k,\ \ y=\log_b k,\ \ z=\log_{ab} k$$

x, y, z は 0 でない実数なので，k は 1 でない正の実数となり，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_a k}+\frac{1}{\log_b k}=\log_k a+\log_k b=\log_k ab=\frac{1}{\log_{ab} k}=\frac{1}{z}$$

(2)　m, n が $m>n$ をみたす自然数のとき，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ に対して，

$$5n+5m=mn,\ \ mn-5m-5n=0,\ \ (m-5)(n-5)=25$$

$m>n>0$ から，$m-5>n-5>-5$ となり，$(m-5,\ n-5)=(25,\ 1)$ より，

$$(m,\ n)=(30,\ 6)$$

(3)　$1<a<b$ で自然数 m, n に対し，$a^m=b^n=(ab)^5$ のとき，(1)より，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$

そして，$b^n=a^m<b^m$ から $m>n$ なので，(2)より，

$$(m,\ n)=(30,\ 6)$$

すると，$a^{30}=b^6=(ab)^5$ となり，$b^6=a^5b^5$ から，

$b=a^5$ （このとき $a^{30}=b^6$ は成立している）

［解　説］

不定方程式に指数・対数を加味した頻出題です。丁寧すぎるほどの誘導です。