1

解答解説のページへ

i を虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ。

2

解答解説のページへ

次の定積分を求めよ。

(1)　$I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2)　$J=\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

3

解答解説のページへ

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が垂直であるとする。$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{a}+3\vec{b}$のなす角をθ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$とするとき，$\sin^2\theta$をx, yを用いて表せ。

(2)　θの最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

m を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A, B とし, 原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y=x^2$ と(2)の円が A, B, O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

座標平面上を運動する点$\mathrm{P}(x,\ y)$の時刻tにおける座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ \ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点Pと原点Oとの距離を求めよ。

(2) 点Pの時刻tにおける速度$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$と速さ$\left|\vec{v}\right|$を求めよ。

(3) 定積分$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$，$(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=2+11i$

$$(2+i)^4=(3+4i)^2=9+24i+16i^2=-7+24i$$

$$(2+i)^5=(3+4i)(2+11i)=6+33i+8i+44i^2=-38+41i$$

$(2+i)^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の虚部の整数を 10 で割った余りは，$n=2,\ 4$ のとき 4，$n=3,\ 5$ のとき 1 である。

(2)　まず，$(2+i)^n=a_n+b_ni$ とおくとき，$a_1=2$，$b_1=1$ で，

$$a_{n+1}+b_{n+1}i=(2+i)^{n+1}=(a_n+b_ni)(2+i)=(2a_n-b_n)+(a_n+2b_n)i$$

すると，$a_{n+1}=2a_n-b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……②となり，これより，帰納的に，a_n，b_n は整数である。

そこで，②より $a_n=b_{n+1}-2b_n$ なので，この式を①に代入すると，

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=2(b_{n+1}-2b_n)-b_n,\ b_{n+2}=4b_{n+1}-5b_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

以下，mod10 として，n が奇数のとき $b_n\equiv1$，n が偶数のとき $b_n\equiv4$，すなわち k を自然数として $b_{2k-1}\equiv1$，$b_{2k}\equiv4$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき　$b_1=1$，$b_2=4$ より，成立している。

(ii)　$k=l$ のとき　$b_{2l-1}\equiv1$，$b_{2l}\equiv4$ と仮定すると，③より，

$$b_{2l+1}=4b_{2l}-5b_{2l-1}\equiv4\cdot4-5\cdot1\equiv16-5\equiv11\equiv1$$

$$b_{2l+2}=4b_{2l+1}-5b_{2l}\equiv4\cdot1-5\cdot4\equiv4-20\equiv-16\equiv4$$

よって，$k=l+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，n が奇数のとき $b_n\equiv1$，n が偶数のとき $b_n\equiv4$ である。

すると，n の偶奇にかかわらず $b_n\neq0$ なので，$(2+i)^n$ は虚数である。

［解 説］

複素数の n 乗を題材にした整数問題です。(1)の誘導により(2)の方針が決定できます。なお，実部を 10 で割った余りにも周期性があり，これと連立漸化式①②を組み合わせて証明する方法も考えられます。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1) $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ に対し，$x=\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと $dx=\cos\theta d\theta$ であり，$x=0\to1$ のとき $\theta=0\to\frac{\pi}{2}$ となるので，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\theta}{4}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

(2) $J=\int_0^1 x^3\log(x^2+1)dx$ に対し，部分積分を適用すると，

$$J=\Big[\frac{x^4}{4}\log(x^2+1)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x^4}{4}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^5}{x^2+1}dx$$

ここで，$K=\int_0^1\frac{x^5}{x^2+1}dx$ とおくと，

$$K=\int_0^1\left(x^3-x+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log2$$

これより，$J=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{2}K=\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log2\right)=\frac{1}{8}$ である。

［解　説］

基本的な定積分の計算問題です。なお，(2)については，$t=x^2+1$ と置換した後，部分積分を実行した方が計算が楽との指摘がありましたが，その通りでした。

3

問題のページへ

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=x>0$，$|\vec{b}|=y>0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ を満たすとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|}=\frac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}}\cdots\cdots\cdots①$$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ より，

$$\sin^2\theta=1-\frac{x^4+6x^2y^2+9y^4}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}=\frac{4x^2y^2}{x^4+10x^2y^2+9y^4}\cdots\cdots\cdots②$$

(2) $t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，t は $t>0$ の任意の値をとり，②から，

$$\sin^2\theta=\frac{4}{\dfrac{x^2}{y^2}+10+\dfrac{9y^2}{x^2}}=\frac{4}{9t^2+\dfrac{1}{t^2}+10}$$

ここで，①から $\cos\theta>0$ であるので $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\theta\geqq 0$ から，

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{9t^2+\dfrac{1}{t^2}+10}}\cdots\cdots\cdots③$$

相加平均と相乗平均の関係から，$9t^2+\dfrac{1}{t^2}\geqq 2\sqrt{9t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}=6$ なので，③から，

$$0<\sin\theta\leqq\frac{2}{\sqrt{6+10}}=\frac{1}{2}$$

等号は，$9t^2=\dfrac{1}{t^2}\left(t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，すなわち $x=\sqrt{3}y$ のときに成立する。

よって，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，θ は最大値 $\dfrac{\pi}{6}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの内積についての基本的な問題です。相加平均と相乗平均の関係を利用することが，式変形のポイントです。

4

問題のページへ

(1)　放物線 $y=x^2$ ……①と直線 $y=mx+1$ ……②を連立して,

$$x^2=mx+1,\ x^2-mx-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③の判別式 $D=m^2+4>0$ から, 実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると,

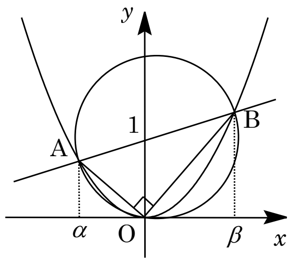
$$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-1 \cdots\cdots\cdots ④$$

すると, ①②の共有点は $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ となり, ④から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=-1+1=0$$

よって, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2)　3 点 A, B, O を通る円の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと,



線分 AB が直径より, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ となるので,

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+\alpha^2\beta^2=0$$

④より, $x^2-mx-1+y^2-(m^2+2)y+1=0$ となり,

$$x^2+y^2-mx-(m^2+2)y=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　放物線①と円⑤を連立すると, $x^2+x^4-mx-(m^2+2)x^2=0$ となり,

$$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0,\ x\{x^3-(m^2+1)x-m\}=0$$

この方程式は $x=0,\ \alpha,\ \beta$ を実数解としてもつことより,

$$x(x+m)(x^2-mx-1)=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥の解は $x=0,\ -m,\ \alpha,\ \beta$ となり, これが $x=0,\ \alpha,\ \beta$ だけであるのは,

(i)　$-m=0$ のとき　$m=0$ となり, ⑥の解は $x=0,\ \pm1$ である。

(ii)　$-m=\alpha$ または $-m=\beta$ のとき　$x=-m$ は $x^2-mx-1=0$ の解となり,

$$m^2+m^2-1=0,\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i)(ii)より, 求める m の値は, $m=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

［解 説］

放物線と直線, および円の関係についての問題です。⑥の左辺の因数分解ように, 見通しをもった計算が重要です。

5

問題のページへ

(1)　時刻 t において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $x=\dfrac{4+5\cos t}{5+4\cos t}$，$y=\dfrac{3\sin t}{5+4\cos t}$ で表されるとき，

$$x^2+y^2=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{(4+5\cos t)^2+9\sin^2 t\}$$

$$=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{16+40\cos t+25\cos^2 t+9(1-\cos^2 t)\}$$

$$=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}(16\cos^2 t+40\cos t+25)=\frac{(4\cos t+5)^2}{(5+4\cos t)^2}=1$$

よって，$\mathrm{OP}=1$ である。

(2)　$$\frac{dx}{dt}=\frac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)\cdot(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}=\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t\cdot(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}=\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}$$

これより，$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\dfrac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \dfrac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)$ となり，

$$|\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{9}{(5+4\cos t)^4}\{9\sin^2 t+(4+5\cos t)^2\}$$

$$=\frac{9}{(5+4\cos t)^4}(4\cos t+5)^2=\frac{9}{(5+4\cos t)^2}$$

よって，$|\vec{v}|=\dfrac{3}{5+4\cos t}$ である。

(3)　$I=\displaystyle\int_0^\pi\frac{dt}{5+4\cos t}$ とおくと，(2)から，$I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^\pi|\vec{v}|dt$ となる。

ここで，$0\leqq t\leqq\pi$ における点 P の軌跡は，(1)から，中心が原点で半径 1 の円弧である。

(2)から，x, y の増減について，$4+5\cos\alpha=0$ $\left(\cos\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}\right)$ を満たす α を用いると，右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

これより，点 P の軌跡は，半円 $x^2+y^2=1$ $(y\geqq 0)$ となるので，その弧の長さが $\displaystyle\int_0^\pi|\vec{v}|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=\pi$ から，

$$I=\frac{1}{3}\cdot\pi=\frac{\pi}{3}$$

［解　説］

パラメータ曲線に定積分の計算を絡めた問題です。意味を考えながら計算を進めていくと，計算の海に溺れることはないでしょう。