1

解答解説のページへ

α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である 3 次式で，次の条件(i)，(ii)をみたすとする。

(i)　$f(x)$ の x^3 の係数は 1 である。

(ii)　$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ が成り立つ。

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(\alpha+2)=0$ とする。$f'(x)=0$ かつ $x\neq\alpha$ をみたす x を α を用いて表せ。

(3)　(2)の条件のもとで $\alpha=0$ とする。xy 平面において不等式

$$y \geqq f(x) \ \text{かつ}\ y \geqq f'(x) \ \text{かつ}\ y \leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，A$(1,\ 0)$，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする△OAB の内接円の中心を P とする。また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ。

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を自然数とし，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ に対して $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　(1)の x の値を x_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

p を 2 以上の自然数とし，数列$\{x_n\}$は

$$x_1=\frac{1}{2^p+1},\ \ x_{n+1}=|2x_n-1|\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$ のとき，x_n を求めよ。

(2)　$x_{p+1}=x_1$ であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　x^3 の係数が 1 である 3 次式 $f(x)$ に対し，$f(\alpha)=0$ から因数定理を適用すると，

$$f(x)=(x-\alpha)p(x)\ \ (p(x)\text{は}x^2\text{の係数が 1 である 2 次式})\cdots\cdots\text{①}$$

①より，$f'(x)=p(x)+(x-\alpha)p'(x)$ となり，$f'(\alpha)=0$ から $p(\alpha)=0$ なので，因数定理を適用すると，

$$p(x)=(x-\alpha)q(x)\ \ (q(x)\text{は}x\text{の係数が 1 である 1 次式})\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$f(x)=(x-\alpha)^2q(x)$ となり，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる。

(2)　k を実数として，$q(x)=x+k$ とおくと，$f(x)=(x-\alpha)^2(x+k)\cdots\cdots$③

すると，$f(\alpha+2)=0$ から $(\alpha+2-\alpha)^2(\alpha+2+k)=0$ となり，

$$4(\alpha+2+k)=0,\ k=-\alpha-2$$

③から，$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)\cdots\cdots$④となり，

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-3\alpha-4)\cdots\cdots\text{⑤}$$

ここで，$f'(x)=0$ かつ $x\neq\alpha$ より，$3x-3\alpha-4=0$ となり，$x=\alpha+\dfrac{4}{3}$

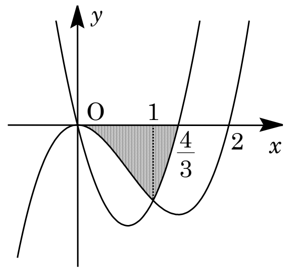
(3)　$\alpha=0$ のとき，④から $f(x)=x^2(x-2)$，⑤から $f'(x)=x(3x-4)$

ここで，$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ を連立して，

$$x^2(x-2)=x(3x-4),\ x(x^2-5x+4)=0$$

$$x(x-1)(x-4)=0$$

これより，2 曲線の交点は，$x=0,\ 1,\ 4$ となる。



すると，$y\geqq f(x)$，$y\geqq f'(x)$，$y\leqq 0$ で表される領域は右図の網点部となり，その面積 S は，

$$S=-\int_0^1(x^3-2x^2)dx-\int_1^{\frac{4}{3}}(3x^2-4x)dx=-\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1-\Big[x^3-2x^2\Big]_1^{\frac{4}{3}}$$

$$=-\Big(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\Big)-\Big(\frac{64}{27}-\frac{32}{9}\Big)+(1-2)=\frac{5}{12}+\frac{32}{27}-1=\frac{65}{108}$$

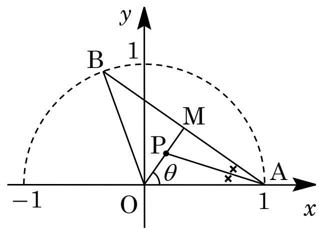
［解　説］

微分法と因数定理および面積計算の組合せ問題です。(1)の結論については，その証明とともに記憶するに値します。

２

問題のページへ

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，O，A$(1,\ 0)$，B$(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$ を頂点とする△OAB に対し，内接円の中心を P とする。



まず，直線 OP は∠AOB の二等分線なので，

$$\angle\mathrm{AOP}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot2\theta=\theta$$

また，OP の延長と AB の交点 M とすると，OA = OB から OM ⊥ AB となり，

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$$

そこで，$\mathrm{OP}=r\ (0<r<\cos\theta)$ とおくと，$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表せる。

次に，直線 AP は∠OAB の二等分線なので，点 P と x 軸の距離と，点 P と直線 AB の距離が等しくなり，$r\sin\theta=\cos\theta-r$ から，

$$(1+\sin\theta)r=\cos\theta,\ \ r=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

すると，$r\cos\theta=\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}=1-\sin\theta$，$r\sin\theta=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$ となり，

$$\mathrm{P}\Big(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\Big)$$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x=1-\sin\theta$，$y=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$ であり，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\cos\theta<0$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}=-\frac{\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1}{(1+\sin\theta)^2}$$

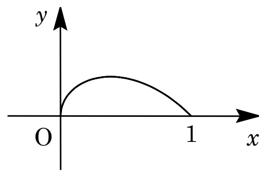
$$=-\frac{(\sin\theta+1)(\sin^2\theta+\sin\theta-1)}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$=-\frac{\sin^2\theta+\sin\theta-1}{1+\sin\theta}$$

ここで，$\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，点 P の x，y の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	0
x	1	↘		↘	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗		↘	0

そして，点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とすると，



$$V=\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}(-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cos\theta\,d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\cos\theta\,d\theta$$

ここで，$1+\sin\theta=t$ とおくと，$\cos\theta\,d\theta=dt$ となるので，

$$V=\pi\int_1^2\frac{(t-1)^2(2-t)}{t}dt=\pi\int_1^2\frac{-t^3+4t^2-5t+2}{t}dt$$
$$=\pi\int_1^2\left(-t^2+4t-5+\frac{2}{t}\right)dt=\pi\left[-\frac{t^3}{3}+2t^2-5t+2\log t\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{7}{3}+6-5+2\log 2\right)\pi=\left(-\frac{4}{3}+2\log 2\right)\pi$$

［解 説］

パラメータ曲線と回転体の体積についての融合問題で，量的には多めです。なお，(1)では△OAB の 2 つの内角の二等分線の交点として P を数式処理しましたが，他の方法としては，内心のベクトル表示を利用することも考えられます。

3

問題のページへ

(1)　$a+b=30$ を満たす 2 つの自然数 a, b の順列の総数は，右図のように 30 個の球を 1 列に並べ，その間の 29 か所のうち 1 か所を選んでしきりを入れ，しきりの左側の球の個数を a，右側の球の個数を b に対応させると考えて，

○ ⋯ ○ ○ | ○ ○ ○ ⋯ ○
a 個　　b 個

$${}_{29}\mathrm{C}_1 = 29 \quad （個）$$

(2)　$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の順列の総数は，右図のように 30 個の球を 1 列に並べ，その間の 29 か所のうち 2 か所を選んでしきりを入れ，左側のしきりの左側の球の個数を a，2 つのしきりの間の球の個数を b，右側のしきりの右側の球の個数を c に対応させると考えて，

○ ⋯ ○ | ○ ⋯ ○ | ○ ⋯ ○
a 個　　b 個　　c 個

$${}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29\times 28}{2} = 406 \quad （個）$$

(3)　$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の順列のうち，

(i)　a, b, c の 3 つが同じもの　$(a,\ b,\ c)=(10,\ 10,\ 10)$ だけなので 1 個。

(ii)　a, b, c の 2 つだけが同じもの
$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 1,\ 28\}$，$\{2,\ 2,\ 26\}$，$\cdots$，$\{9,\ 9,\ 12\}$，$\{11,\ 11,\ 8\}$，$\cdots$，$\{14,\ 14,\ 2\}$ の 13 種類より，$(a,\ b,\ c)$ の個数は $13\times 3=39$ 個。

(iii)　a, b, c がすべて異なるもの　$(a,\ b,\ c)$ の個数は $406-(1+39)=366$ 個。

(i)(ii)(iii)より，$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の組合せの総数は，

$$1+\frac{39}{3}+\frac{366}{3!}=1+13+61=75 \quad （個）$$

［解　説］

場合の数の頻出題です。(1)と(2)は，有名なテクニカルな方法で記しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ （n は自然数）のとき，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

ここで，$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ となり，

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x\leqq 0$$

すると，$g(x)$ は単調に減少し，

$$g(2n\pi)=2n\pi>0,\ g((2n+1)\pi)=-(2n+1)\pi<0$$

これより，$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ に $g(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha_n$ とおく。

すると，$g(x)$ と $f'(x)$ の符号変化は一致することより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ が最大となる x の値は $x=\alpha_n$ だけである。

x	$2n\pi$	$\cdots$	α_n	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

(2)　条件より $x_n=\alpha_n$ となり，$g(x_n)=0$ から，

$$x_n\cos x_n-\sin x_n=0,\ x_n\cos x_n=\sin x_n$$

ここで，$\cos x_n=0$ とすると成立しないので，$\cos x_n\neq 0$ から $x_n=\dfrac{\sin x_n}{\cos x_n}=\tan x_n$

すると，$\dfrac{n}{\tan x_n}=\dfrac{n}{x_n}$ となり，$\dfrac{n}{(2n+1)\pi}<\dfrac{n}{x_n}<\dfrac{n}{2n\pi}$ から，

$$\frac{1}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\pi}<\frac{n}{x_n}<\frac{1}{2\pi}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}=\frac{1}{2\pi}$ となる。

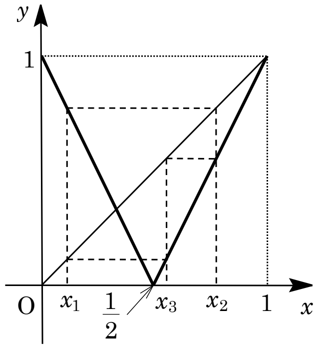
［解　説］

微分と増減および極限についての基本的な問題です。なお，(1)については，原点と点 $(x,\ \sin x)$ を結ぶ直線の傾きとして $f(x)$ をとらえれば，結論は図形的に明らかです。

5

問題のページへ

(1)　自然数 $p \geqq 2$ で，$x_1 = \dfrac{1}{2^p+1}$，$x_{n+1} = |2x_n - 1|$ と定義される数列 $\{x_n\}$ に対し，$p=3$ のとき $x_1 = \dfrac{1}{2^3+1} = \dfrac{1}{9}$



$$x_2 = |2x_1 - 1| = \left|\frac{2}{9} - 1\right| = \frac{7}{9}$$

$$x_3 = |2x_2 - 1| = \left|\frac{14}{9} - 1\right| = \frac{5}{9}$$

$$x_4 = |2x_3 - 1| = \left|\frac{10}{9} - 1\right| = \frac{1}{9}$$

すると，$x_4 = x_1$ より，数列 $\{x_n\}$ は $\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{7}{9}$，$\dfrac{5}{9}$ を周期 3 で繰り返す周期数列となり，k を 0 以上の整数として，

$$x_n = \frac{1}{9}\ (n = 3k+1),\quad x_n = \frac{7}{9}\ (n = 3k+2),\quad x_n = \frac{5}{9}\ (n = 3k+3)$$

(2)　(1)と同様にして，$p=2$ のときは，$x_1 = \dfrac{1}{5}$，$x_2 = \dfrac{3}{5}$，$x_3 = \dfrac{1}{5} = x_1$

$p=4$ のときは，$x_1 = \dfrac{1}{17}$，$x_2 = \dfrac{15}{17}$，$x_3 = \dfrac{13}{17}$，$x_4 = \dfrac{9}{17}$，$x_5 = \dfrac{1}{17} = x_1$

さて，$0 < \dfrac{1}{2^p+1} \leqq \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$ から，$0 < x_1 \leqq \dfrac{1}{5}$ であり，

$$x_2 = \left|\frac{2}{2^p+1} - 1\right| = \left|\frac{-2^p+1}{2^p+1}\right| = \frac{2^p-1}{2^p+1}$$

すると，$2 \leqq n \leqq p+1$ で，$x_n = \dfrac{2^p - (1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})}{2^p+1} = \dfrac{2^p - 2^{n-1}+1}{2^p+1}$ と推測できるので，以下，この式の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$x_2 = \dfrac{2^p - 2^1 + 1}{2^p+1} = \dfrac{2^p-1}{2^p+1}$ となり，成立している。

(ii)　$n = k\ (2 \leqq k \leqq p)$ のとき　$x_k = \dfrac{2^p - 2^{k-1}+1}{2^p+1}$ と仮定する。

$$x_{k+1} = |2x_k - 1| = \left|\frac{2^{p+1} - 2^k + 2}{2^p+1} - 1\right| = \left|\frac{2^p - 2^k + 1}{2^p+1}\right| = \frac{2^p - 2^k + 1}{2^p+1}$$

これより，$n = k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，$x_n = \dfrac{2^p - 2^{n-1}+1}{2^p+1}\ (2 \leqq n \leqq p+1)$ となり，これから，

$$x_{p+1} = \frac{2^p - 2^{p+1-1}+1}{2^p+1} = \frac{1}{2^p+1} = x_1$$

［解　説］

漸化式と数学的帰納法についての問題です。(2)については，図による予測と具体例の計算をもとに，結論を推測して進めています。