1

解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3) t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3)　(2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ ……(＊)を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　(＊)が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2)　(＊)が整数を解にもつとする。このとき(＊)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3)　(＊)が整数を解にもつ確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で, 3 次の係数は 1, 定数項は -3 とする。方程式 $f(x)=0$ は, 1 と虚数 α, β を解にもつとし, α の実部は 1 より大きく, α の虚部は正とする。複素数平面上で α, β, 1 が表す点を順に A, B, C とし, 原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) α の絶対値を求めよ。

(2) θ を α の偏角とする。$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 OC 上にない点P$(x,\ y,\ z)$から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$を x, y, z の式で表せ。

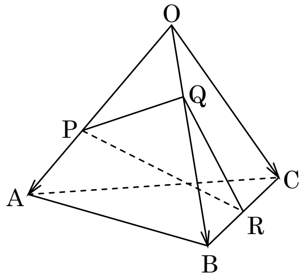
(2)　P$(x,\ y,\ z)$が L の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3)　$1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=1-t:t$，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　正四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 から，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ となり，(1)から，

$$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot 1^2-\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}=0$$

まとめると，$6t^2-7t+2=0$ から $(3t-2)(2t-1)=0$ となり，$0<t<1$ より，

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=(1-t)^2\cdot 1^2-2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+t^2\cdot 1^2=3t^2-3t+1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\cdot 1^2+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1^2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}$$

(i)　$t=\frac{2}{3}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{7}{36}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{21}}{36}$ である。

(ii)　$t=\frac{1}{2}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\frac{1}{4}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\frac{1}{4}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用に関する基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　k を 2 以上の整数とし，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\left(k-1-\frac{k-1}{x^k}\right)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

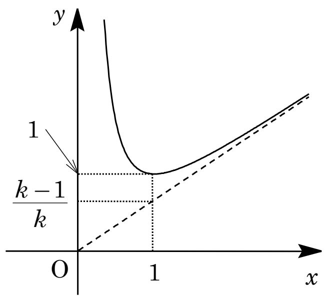
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\left(k-1+\frac{1}{x^k}\right)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{k-1}{k}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\dfrac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ のとき，$x_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　$x_1>1$ より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$x_l>1$ と仮定すると，(1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$ となる。

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$ である。

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)$ ………①

ここで，$x_n>1$ のとき，平均値の定理より，ある $c_n\ (1<c_n<x_n)$ において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$ となるので，

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{c_n^k}\right)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq 2$ で $0<1-\dfrac{1}{c_n^k}<1$ から，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ ………③

すると，$x_n-1>0$ であり，③から $n\geqq 2$ において，

$$0<x_n-1<(x_1-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\dfrac{k-1}{k}<1$ から，④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解　説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線，(3)の平均値の定理の利用については，必須技法の 1 つです。

3

問題のページへ

(1) 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ ……(＊)が $x=1$ を解にもつ条件は,

$1-a+b=0$，$a=1+b$ ………①

ここで, さいころを3回ふって, 1回目に出た目の数が a, 2回目と3回目に出た目の数の和が b である。そこで, 2回目と3回目の目の数とその和 b の値をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

すると, $b\geqq 2$ より, ①から $a\geqq 3$ となり,

(i)　$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のとき

目の出方は, 表より1通り。

(ii)　$(a,\ b)=(4,\ 3)$ のとき

目の出方は, 表より2通り。

(iii) $(a,\ b)=(5,\ 4)$ のとき　目の出方は, 表より3通り。

(iv) $(a,\ b)=(6,\ 5)$ のとき　目の出方は, 表より4通り。

(i)～(iv)より, 求める確率は, $\dfrac{1+2+3+4}{6^3}=\dfrac{5}{108}$ である。

(2) (＊)が整数解をもつとき, その解を $x=\alpha,\ \beta$　$(\alpha\leqq\beta)$ とすると,

$a=\alpha+\beta$ ………②, $b=\alpha\beta$ ………③

すると, $\alpha,\ \beta$ はともに整数となり, さらに $a>0$, $b>0$ なので, ②③より $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ である。

また, $\alpha\leqq\beta$ から $2\alpha=\alpha+\alpha\leqq\alpha+\beta$ で, ②から $\alpha+\beta\leqq 6$ なので, $2\alpha\leqq 6$ すなわち $\alpha\leqq 3$ となる。したがって, 少なくとも1つの解は3以下である。

(3) (＊)が整数解 $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとき, $1\leqq\alpha\leqq\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{2}$ ……④に注意して, a の値で場合分けをする。

(i)　$a=1$ のとき　④から整数 α は存在しない。

(ii)　$a=2$ のとき　④から $\alpha=1$, ②から $\beta=1$, ③から $b=1$ となり, 不適である。

(iii) $a=3$ のとき　④から $\alpha=1$, ②から $\beta=2$, ③から $b=2$ となる。

すると, (1)の表より1通り。

(iv) $a=4$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2$ となる。

(iv-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=3$, ③から $b=3$ となるので, 表より2通り。

(iv-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=2$, ③から $b=4$ となるので, 表より3通り。

(v)　$a=5$ のとき　④から $\alpha=1,\ 2$ となる。

(v-a)　$\alpha=1$ のとき　②から $\beta=4$, ③から $b=4$ となるので, 表より3通り。

(v-b)　$\alpha=2$ のとき　②から $\beta=3$, ③から $b=6$ となるので, 表より5通り。

(vi)　$a=6$のとき　④から$\alpha=1,\ 2,\ 3$となる。

(v-a)　$\alpha=1$のとき　②から$\beta=5$，③から$b=5$となるので，表より4通り。

(v-b)　$\alpha=2$のとき　②から$\beta=4$，③から$b=8$となるので，表より5通り。

(v-c)　$\alpha=3$のとき　②から$\beta=3$，③から$b=9$となるので，表より4通り。

(i)～(vi)より，求める確率は，$\dfrac{1+(2+3)+(3+5)+(4+5+4)}{6^3}=\dfrac{1}{8}$である。

［解　説］

2次方程式の解が絡んだ形の確率の問題です。解答例からもわかるように，丁寧に場合分けをするタイプです。なお，(3)は(1)と同じく，aの値を基準に場合分けをしています。

4

問題のページへ

(1)　条件より，a，b を実数として，$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ とおくと，$f(x)=0$ は $x=1$ を解にもつことから，$f(1)=0$ となり，

$$1+a+b-3=0,\ b=-a+2$$

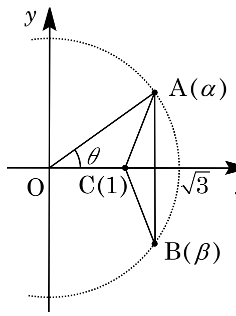
すると，$f(x)=x^3+ax^2+(-a+2)x-3=(x-1)\{x^2+(a+1)x+3\}\cdots\cdots\cdots①$

さらに，$f(x)=0$ は虚数解 $x=\alpha$，β をもつことから，$\beta=\overline{\alpha}$ となり，①より，

$$x^2+(a+1)x+3=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$\alpha\overline{\alpha}=3$ すなわち $|\alpha|^2=3$ となり，$|\alpha|=\sqrt{3}$ である。

(2)　(1)から $|\alpha|=\sqrt{3}$，また $\arg\alpha=\theta$ とおくと，α の実部が 1 より大で虚部が正から，△ABC は右図のような配置になり，



$$\alpha=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta),\ \beta=\sqrt{3}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

すると，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)=\sin\theta(3\cos\theta-\sqrt{3})$$

(3)　θ_0 を $\cos\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす第 1 象限の角とし，$0<\theta<\theta_0$ において，(2)から，

$$S'=\cos\theta(3\cos\theta-\sqrt{3})-3\sin^2\theta=3\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3(1-\cos^2\theta)$$
$$=6\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3=(2\cos\theta-\sqrt{3})(3\cos\theta+\sqrt{3})$$

ここで，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $\cos\theta_0<\cos\dfrac{\pi}{6}$ となり，$\theta_0>\dfrac{\pi}{6}$ より S の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	θ_0
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

すると，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき S は最大になる。

このとき，$\alpha=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，②から，

$$a+1=-(\alpha+\overline{\alpha})=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-3$$

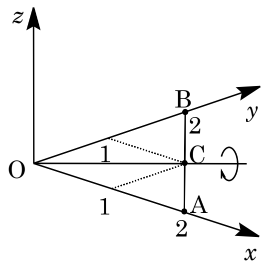
よって，$a=-4$ となり，①から $f(x)=x^3-4x^2+6x-3$ である。

［解　説］

3 次方程式に複素数平面を絡めた融合問題です。複雑な場合分けが生じないように，配慮された問題設定となっています。

5

問題のページへ



(1)　点Hは直線OC上の点なので，tを実数として，

$$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OC}=t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t,\ 0)$$

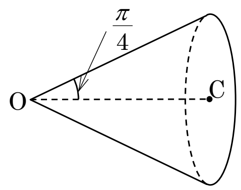
また，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$より，

$$\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OH}=(x-t,\ y-t,\ z)$$

ここで，$\overrightarrow{HP}\perp\overrightarrow{OC}$から$\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OC}=0$となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$

よって，$t=\dfrac{x+y}{2}$から，$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{HP}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$



(2)　$\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{\pi}{4}$から，回転体$L$は，線分OCを中心軸とし，母線と中心軸のなす角が$\dfrac{\pi}{4}$の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点Pが$L$の点であるための条件は，

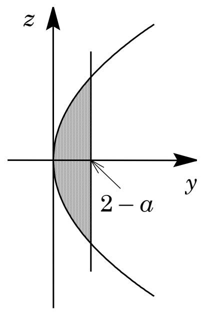
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\geqq|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$0\leqq x+y\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x+y\geqq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となり，$(x+y)^2\geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2\leqq 2xy\cdots\cdots\cdots③$$

よって，②③より，$z^2\leqq 2xy$かつ$0\leqq x+y\leqq 2$である。



(3)　Lを平面$x=a\ (1\leqq a\leqq 2)$で切った切り口は，③より，

$$z^2\leqq 2ay\cdots\cdots\cdots④$$

②より$0\leqq a+y\leqq 2$から，$-a\leqq y\leqq 2-a\cdots\cdots\cdots⑤$

そして，④⑤を平面$x=a$上に図示すると右図の網点部になり，その面積を$S(a)$とおくと，y軸に関する対称性から，

$$S(a)=2\int_0^{2-a}\sqrt{2ay}\,dy=2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a}\,(2-a)\sqrt{2-a}=\frac{4}{3}\sqrt{2}\,(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4)　立体$\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$の体積を$V$とすると，

$$V=\int_1^2 S(a)da=\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I=\displaystyle\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$とおくと，

$$I=\int_1^2(2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da=\int_1^2(2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s=a-1$とおくと，$ds=da$となり，

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}$，また $u=1-s^2$ とおくと $du=-2sds$ から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$ となるので，$V=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\Big(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ である。

［解　説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体 L が直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。