1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ と $g(x)=e^{-x}\cos x$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ を求めよ。

(2) 整数 k に対し，定積分 $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}\left|\sin x\right|dx$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

虚数単位を i とし，複素数 α を，$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ とする。また，実数 $u,\ v$ に対し，複素数 $w,\ z$ を，$w=u+vi$，$z=\alpha w$ とする。次の問いに答えよ。

(1) z の実部と虚部，および $|z|$ を，それぞれ u と v を用いて表せ。

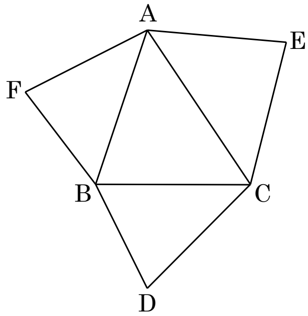
(2) $u+\sqrt{3}v-1=0$ のとき，実数 $s,\ t$ を $s+ti=z^2$ で定める。$t^2=s+\dfrac{1}{4}$ であることを示せ。

(3) $u+\sqrt{3}v-1=0$ のとき，実数 $a,\ b$ を $a+bi=w^2$ で定める。xy 平面において，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ の距離は，P と原点の距離に等しいことを示せ。

3

解答解説のページへ

右の図は，ある四面体 T の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$ ，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$ ，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$ ，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$ ，および $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ である。このとき，三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。



$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。3 辺の長さが $\sqrt{a_n}$，$\sqrt{a_{n+1}}$，$\sqrt{a_{n+1}}$ である二等辺三角形の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となる数列$\{a_n\}$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 3 辺の長さが $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{b}$ である二等辺三角形の面積を求めよ。

(2) 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$ を示せ。また，$a_{n+1}\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることを示せ。

(3) 等式 $a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$ を示せ。

(4) $|a_1-1|\leqq\dfrac{1}{4}$ とする。このとき，すべての n について，$|a_{n+1}-1|\leqq\dfrac{3}{4}|a_n-1|$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{-x}\sin x$ に対し，$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$g(x)=e^{-x}\cos x$ に対し，$g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

(2)　(1)から，$f'(x)+g'(x)=-2e^{-x}\sin x$ となり，

$$e^{-x}\sin x=-\frac{1}{2}\{f'(x)+g'(x)\}=-\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}'$$

さて，$I_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$ とおくと，

$$I_k=-\frac{1}{2}\Big[f(x)+g(x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

ここで，$\sin k\pi=0$，$\cos k\pi=(-1)^k$ に注意して，

$$I_k=-\frac{1}{2}\{e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^k\}=-\frac{(-1)^k}{2}e^{-k\pi}\{e^{-\pi}\cdot(-1)-1\}$$

$$=\frac{(-1)^k}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-k\pi}$$

(3)　$J_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\int_0^{n\pi}|e^{-x}\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|e^{-x}\sin x|dx$ とおく。

ここで，$k\pi\leqq x\leqq(k+1)\pi$ において，$e^{-x}\sin x$ の符号は変わらないので，

$$J_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right|=\sum_{k=0}^{n-1}|I_k|=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-k\pi}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$ となる。

［解 説］

定積分の計算についての有名問題です。(1)の計算は，(2)の原始関数を直接的に求めるための誘導とみることができます。

2

問題のページへ

(1)　$z=\alpha w=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(u+vi)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}u-\dfrac{1}{2}v\right)+\left(\dfrac{1}{2}u+\dfrac{\sqrt{3}}{2}v\right)i$ となる。

これより，z の実部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}u-\dfrac{1}{2}v$，虚部は $\dfrac{1}{2}u+\dfrac{\sqrt{3}}{2}v$ である。

また，$|z|=|\alpha w|=|\alpha||w|=\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}}\cdot\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{u^2+v^2}$ となる。

(2)　$u+\sqrt{3}v-1=0$ のとき，$u=-\sqrt{3}v+1$ となり，(1)から，

$$z=\frac{\sqrt{3}(-\sqrt{3}v+1)-v}{2}+\frac{-\sqrt{3}v+1+\sqrt{3}v}{2}i=\frac{-4v+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

ここで，$z^2=s+ti$ から，

$$s+ti=\left(\frac{-4v+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\left(\frac{-4v+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{-4v+\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}$$

これより，$s=\left(\dfrac{-4v+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，$t=\dfrac{-4v+\sqrt{3}}{2}$ となり，$t^2=s+\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　$w^2=a+bi$ から，$a+bi=(u+vi)^2=(u^2-v^2)+2uvi$ となり，

$$a=u^2-v^2,\ b=2uv$$

さて，xy 平面において，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ の距離 d は，

$$d=\frac{|a-\sqrt{3}b+1|}{\sqrt{1+3}}=\frac{|(u^2-v^2)-2\sqrt{3}uv+1|}{2}=\frac{|(u-\sqrt{3}v)^2-4v^2+1|}{2}$$

すると，$u+\sqrt{3}v-1=0$ $(u=-\sqrt{3}v+1)$ のとき，

$$d=\frac{|(-2\sqrt{3}v+1)^2-4v^2+1|}{2}=\frac{|8v^2-4\sqrt{3}v+2|}{2}=|4v^2-2\sqrt{3}v+1|$$

さらに，$4v^2-2\sqrt{3}v+1=4\left(v-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}>0$ から，$d=4v^2-2\sqrt{3}v+1$ ………①

また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と原点 O との距離は，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(u^2-v^2)^2+(2uv)^2}=\sqrt{u^4+2u^2v^2+v^4}=\sqrt{(u^2+v^2)^2}$$
$$=u^2+v^2=(-\sqrt{3}v+1)^2+v^2=4v^2-2\sqrt{3}v+1\ \text{………②}$$

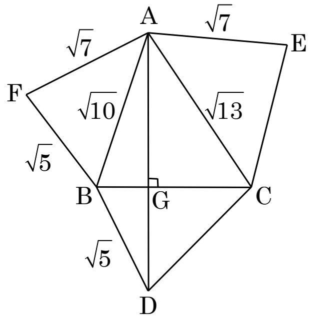
①②より，$d=\mathrm{OP}$ となり，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ の距離は，P と原点の距離に等しい。

［解　説］

複素数についての問題です。上の解答例は計算だけで押し通しました。ただ，(2)と(3)の関係が気になったので再考すると，放物線の定義と回転移動が絡んでいました。

3

問題のページへ



右の四面体 T の展開図において，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ より，△ABC の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot13-7^2}=\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，△ABC に余弦定理を適用すると,

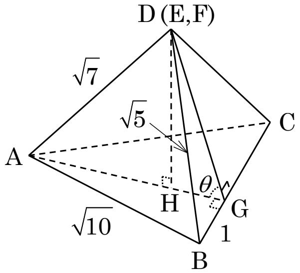
$$\mathrm{BC}^2=10+13-2\cdot7=9,\ \mathrm{BC}=3$$

そして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となり，線分 AD と BC の交点を G とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AG}=\frac{3}{2}\mathrm{AG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$\frac{3}{2}\mathrm{AG}=\frac{9}{2}$ となり，$\mathrm{AG}=3$ から,

$$\mathrm{BG}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{10-9}=1,\ \mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BG}^2}=\sqrt{5-1}=2$$



さて，四面体 T において，点 D から AG に下ろした垂線の足 H に対し $\mathrm{DH}\perp\mathrm{AG}$ ……③である。また，$\mathrm{DG}\perp\mathrm{BC}$ かつ $\mathrm{AG}\perp\mathrm{BC}$ より，平面 DAG は辺 BC と垂直になるので，$\mathrm{DH}\perp\mathrm{BC}$ ……④である。

すると，③④から DH は平面 ABC に垂直である。

そこで，$\angle\mathrm{DGA}=\theta$ とおくと，余弦定理から,

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AG}^2+\mathrm{DG}^2-\mathrm{DA}^2}{2\mathrm{AG}\cdot\mathrm{DG}}=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DG}\sin\theta=2\sqrt{1-\cos^2\theta}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$$

したがって，四面体 T の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

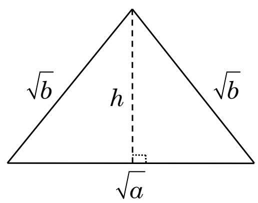
［解　説］

四面体の展開図を題材にした計量問題で，2009 年に北大で似た構図の問題が出ています。なお，三垂線の定理については，手元にある教科書では省かれていましたので，その説明を加えています。

4

問題のページへ

(1)　3 辺の長さが $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{b}$ である二等辺三角形について，右図のように高さを h とおくと，



$$h=\sqrt{(\sqrt{b})^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2}=\sqrt{b-\frac{a}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a}$$

その面積は，$\frac{1}{2}\sqrt{a}h=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4b-a}=\frac{1}{4}\sqrt{a(4b-a)}$

(2)　3 辺の長さが $\sqrt{a_n}$，$\sqrt{a_{n+1}}$，$\sqrt{a_{n+1}}$ である二等辺三角形について，その面積が $\frac{\sqrt{3}}{4}$ より，(1)の結果を利用すると，

$$\frac{1}{4}\sqrt{a_n(4a_{n+1}-a_n)}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \ a_n(4a_{n+1}-a_n)=3$$

すると，$4a_{n+1}-a_n=\frac{3}{a_n}$ から，$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$………①

また，$a_n>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，①より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)\geqq\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{………②}$$

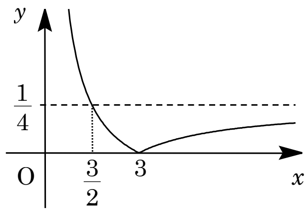
(3)　①から，$a_{n+1}-1=\frac{1}{4}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)-1=\frac{{a_n}^2+3-4a_n}{4a_n}=\frac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$………③

(4)　③から，$|a_{n+1}-1|=\left|\frac{a_n-3}{4a_n}\right||a_n-1|=\frac{1}{4}\left|1-\frac{3}{a_n}\right||a_n-1|$

ここで，$f(x)=\frac{1}{4}\left|1-\frac{3}{x}\right|\ (x>0)$ とおくと，$|a_{n+1}-1|=f(a_n)|a_n-1|$………④

$$f(x)=-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x}\right)\ (0<x<3),\ \ f(x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x}\right)\ (x\geqq3)$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる。



さて，$|a_1-1|\leqq\frac{1}{4}$ から，$\frac{3}{4}\leqq a_1\leqq\frac{5}{4}$ となり，

$$\frac{7}{20}\leqq f(a_1)\leqq\frac{3}{4}$$

また，$n\geqq2$ のとき，②から $a_n\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので，

$$0\leqq f(a_n)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$$

したがって，すべての n について，$0\leqq f(a_n)\leqq\frac{3}{4}$ であるので，④から，

$$|a_{n+1}-1|\leqq\frac{3}{4}|a_n-1|$$

すると，$0\leqq|a_n-1|\leqq|a_1-1|\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\leqq\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ となり，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0,\ \ \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

［解 説］

漸化式と極限の問題です。よく見かけるタイプですが，(4)の詰めが煩雑なので，関数を対応させて処理をしました。