1

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。辺 OA の中点を D, 辺 AB を $2:1$ に内分する点を E, 辺 BC を $3:2$ に内分する点を F とする。また, 実数 s に対し, 点 G を $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たす点とし，$0<t<1$ である実数 t に対し, 線分 GE を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を s，t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3) 線分 DF と線分 GE が点 H で交わるとき, s, t の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，初項$a_1=a$，公比 r の等比数列とし，この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=8$，$r=5$のとき，$S_k=1248$となる自然数kを求めよ。

(2)　$a=6$で，ある自然数 k に対し，$S_k=378$，$S_{2k}=24570$であるとき，公比 r と k を求めよ。

(3)　ある自然数 k に対し，$a_k=54$，$S_k=80$，$S_{2k}=6560$であるとき，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=-x^2+x+1$，$g(x)=-x^3+x+1$ とする。座標平面において，点 A$(0,\ 1)$ は，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点である。A と異なる，2 つの曲線の共有点を B とする。また，$p<0$ とし，点 $(p,\ g(p))$ における $y=g(x)$ の接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を求めよ。

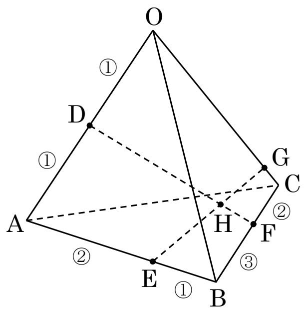
(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の点 A での接線が一致することを示せ。

(3)　直線 l の方程式を p を用いて表せ。また，l が点 B を通るとき，p の値を求めよ。

(4)　$x\geqq 0$ のときは $y=f(x)$，$x<0$ のときは $y=g(x)$ で表される曲線を C とする。直線 l が点 B を通るとき，l と曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　四面体 OABC に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，D は辺 OA の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

E は AB を $2:1$ に内分する点より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

F は BC を $3:2$ に内分する点より，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{c}$，H は線分 GE を $t:(1-t)$ に内分する点から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+(1-t)\cdot s\vec{c}$$

$$=\frac{t}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}+s(1-t)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　線分 DF と線分 GE が点 H で交わるとき，$\mathrm{DH}:\mathrm{HF}=r:(1-r)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+r\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-r)\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+r\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1-r}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}r\vec{b}+\frac{3}{5}r\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①②から，

$$\frac{t}{3}=\frac{1-r}{2}\cdots\cdots\cdots③,\ \ \frac{2}{3}t=\frac{2}{5}r\cdots\cdots\cdots④,\ \ s(1-t)=\frac{3}{5}r\cdots\cdots\cdots⑤$$

③④より，$2\cdot\dfrac{1-r}{2}=\dfrac{2}{5}r$ から $r=\dfrac{5}{7}$ となり，$t=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{3}{7}$

⑤より，$\left(1-\dfrac{3}{7}\right)s=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{7}$ から $s=\dfrac{3}{4}$ となり，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}\vec{b}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\vec{c}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$$

［解　説］

四面体を題材にした空間ベクトルの基本題です。

2

問題のページへ

(1)　初項$a=8$，公比$r=5$の等比数列に対し，第k項までの和$S_k=1248$のとき，

$$\frac{8(5^k-1)}{5-1}=1248,\ 2(5^k-1)=1248$$

すると，$5^k=624+1=625=5^4$から$k=4$である。

(2)　初項$a=6$の等比数列に対し，$S_k=378$，$S_{2k}=24570$のとき，公比$r\neq1$から，

$$\frac{6(r^k-1)}{r-1}=378\cdots\cdots\cdots①,\ \frac{6(r^{2k}-1)}{r-1}=24570\cdots\cdots\cdots②$$

①より$\dfrac{r^k-1}{r-1}=63\cdots\cdots\cdots$③，②より$\dfrac{(r^k+1)(r^k-1)}{r-1}=4095\cdots\cdots\cdots$④

ここで，③④をまとめると，$63(r^k+1)=4095$，$r^k=65-1=64$

すると，③は$\dfrac{64-1}{r-1}=63$となり，$r-1=1$から$r=2$，$2^k=64$から$k=6$である。

(3)　初項a，公比rの等比数列に対し，$a_k=54$から，$ar^{k-1}=54\cdots\cdots\cdots$⑤

また，$S_k=80$，$S_{2k}=6560$のとき，公比$r\neq1$から，

$$\frac{a(r^k-1)}{r-1}=80\cdots\cdots\cdots⑥,\ \frac{a(r^k+1)(r^k-1)}{r-1}=6560\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$r^k+1=\dfrac{6560}{80}=82$から，$r^k=81$となり，⑥に代入すると，

$$a(81-1)=80(r-1),\ a=r-1\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，⑤は$ar^k=54r$となるので，$81a=54r$すなわち$3a=2r\cdots\cdots\cdots$⑨

⑧⑨から，$3(r-1)=2r$となり$r=3$，$a=3-1=2$

したがって，等比数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n=2\cdot3^{n-1}$である。

［解　説］

等比数列の和に関する基本題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

3

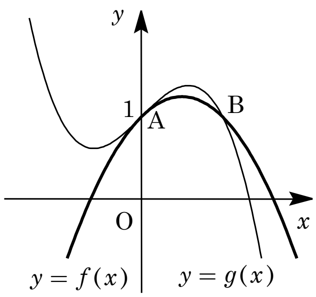
問題のページへ

(1)　$f(x)=-x^2+x+1=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$，$g(x)=-x^3+x+1$ に対して，

$$g'(x)=-3x^2+1$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

ここで，極小値 $g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+1$，極大値 $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+1$ となり，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の概形は右図のようになる。



さて，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の $x\neq 0$ の共有点 B は，

$$-x^2+x+1=-x^3+x+1,\quad x^3-x^2=0$$

すると，$x=1$ から，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ となる。

(2)　$f'(x)=-2x+1$ より $f'(0)=1$ となり，また $g'(0)=1$ から，$f'(0)=g'(0)$ となる。

これより，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ での $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接線の傾きは等しくなり，この 2 本の接線は一致する。

(3)　$p<0$ のとき，点 $(p,\ g(p))$ における $y=g(x)$ の接線 l の方程式は，

$$y-(-p^3+p+1)=(-3p^2+1)(x-p),\quad y=(-3p^2+1)x+2p^3+1$$

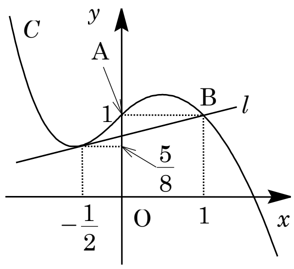
直線 l が点 B を通るとき，$1=(-3p^2+1)+2p^3+1$ から，

$$2p^3-3p^2+1=0,\quad (p-1)^2(2p+1)=0$$

すると，$p<0$ から，$p=-\dfrac{1}{2}$ である。

(4)　(3)から，$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$l: y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ となる。

さて，曲線 $C: y=f(x)\ (x\geqq 0)$，$y=g(x)\ (x<0)$ と直線 l の概形は右図のようになり，l と C で囲まれた部分の面積 S は，



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+1\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-x^3+x+1)\,dx+\int_0^1(-x^2+x+1)\,dx-\frac{39}{32}$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1-\frac{39}{32}=\frac{25}{64}+\frac{7}{6}-\frac{39}{32}=\frac{65}{192}$$

［解 説］

頻出タイプの微積分の総合問題です。ただ，(4)の数値計算はやや面倒ですが。