1

解答解説のページへ

関数 $F(x)=\sin x-\log(1+x)$ と $f(x)=F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(2)　$f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(3)　開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x)>0$ であることを示せ。ただし，自然対数の底 e が $e>2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y=\sin x$，曲線 $y=\log(1+x)$，および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間において，平面 $z=2$ 上の点 P と，平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2 \leqq 1,\ \ z=1$$

を考える。点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面)上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r>2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z=2$ 上の円 $C: x^2+y^2=r^2,\ z=2$ を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

K を自然数とする。2 つの箱 A と B があり，A に赤玉 1 個，B に白玉 K 個が入っている。A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う。n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と自然数 L をとる。次の問いに答えよ。

(1) $k,\ m$ が整数ならば，$\left|k+m\omega\right|^2$ も整数であることを示せ。

(2) $\left|k\right|\leqq L$ を満たす整数 k に対して，$\left|k+\omega\right|$ の最大値を求めよ。

(3) 整数 $k,\ m$ が $\left|k\right|\leqq L$，$\left|m\right|\leqq L$，$\left|k-m\right|\leqq L$ を満たすとき，$\left|k+m\omega\right|\leqq L$ を示せ。

(4) $\left|k+m\omega\right|\leqq L$ を満たす整数の組 $(k,\ m)$ の個数を N とする。不等式 $N\geqq 3L^2+3L+1$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　$F(x)=\sin x-\log(1+x)$ に対して，$f(x)=F'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$ となり，

$$f'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^3}$$

すると，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f''(x)<0$ となり，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(0)=1,\quad f'\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=-1+\Big(\frac{2}{2+\pi}\Big)^2<0$$

よって，$f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\Big(0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big)$ に 1 つだけある。

(2)　(1)より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

そして，$f(0)=0$ から $f(\alpha)>0$ となり，

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=-\frac{2}{2+\pi}<0$$

よって，$f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\Big(0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big)$ に 1 つだけある。

(3)　$F'(x)=f(x)$ なので，(2)より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$F(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	↗		↘	

そして，$F(0)=0$ で，

$$F\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=1-\log\frac{2+\pi}{2}=\log\frac{2e}{2+\pi}>\log\frac{2\times 2.7}{2+3.2}=\log\frac{5.4}{5.2}>\log 1=0$$

よって，開区間 $\Big(0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big)$ において $F(x)>0$ である。

(4)　(3)より，$F(0)=0$ で，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $F(x)>0$ なので，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\log(1+x)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin x-\log(1+x)\}dx$$

$$=-\big[\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=-(-1)-\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)\log\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)+\frac{\pi}{2}=\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)\Big\{1-\log\Big(1+\frac{\pi}{2}\Big)\Big\}$$

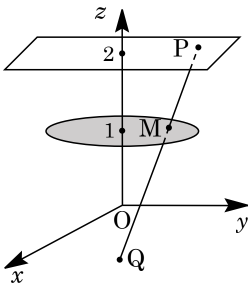
［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。丁寧な誘導に従うと，(3)の証明まで到達します。

2

問題のページへ

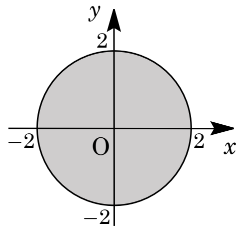
(1)　平面 $z=2$ 上の点 P，平面 $z=0$ 上の点 Q，平面 $z=1$ 上の円板 $B: x^2+y^2\leqq 1$，$z=1$ に対して，線分 PQ と B が共有点をもつ $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ 全体からなる図形を D とする。



さて，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$ のとき，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x}{2},\ \dfrac{y}{2},\ 1\right)$ が円板 B 上にあることから，

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 4$$

よって，D は中心が原点で半径 2 の円の内部または周上である。図示すると，右図の網点部となる。

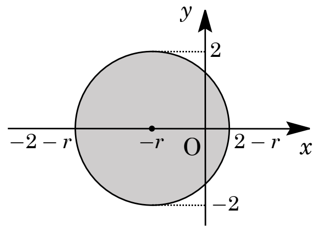


ただし，境界は領域に含む。

(2)　r が正の定数のとき，$\mathrm{P}(r,\ 0,\ 2)$ に対して，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x+r}{2},\ \dfrac{y}{2},\ 1\right)$ が円板 B 上にあることから，

$$\left(\frac{x+r}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\leqq 1,\ (x+r)^2+y^2\leqq 4$$

よって，D は中心 $(-r,\ 0)$ で半径 2 の円の内部または周上である。図示すると，右図の網点部となる。



ただし，境界は領域に含む。

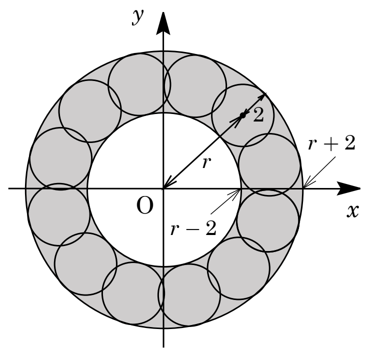
(3)　$r>2$ を満たす定数 r に対して，点 P が円 $C: x^2+y^2=r^2$，$z=2$ 上を動くとき，θ を任意の実数として $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 2)$ とおくことができる。

線分 PQ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x+r\cos\theta}{2},\ \dfrac{y+r\sin\theta}{2},\ 1\right)$ が円板 B 上にあることから，

$$\left(\frac{x+r\cos\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{y+r\sin\theta}{2}\right)^2\leqq 1$$

$$(x+r\cos\theta)^2+(y+r\sin\theta)^2\leqq 4$$

これより，D は中心 $(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$ で半径 2 の円板であり，θ が任意の実数で変化することにより，その通過する部分は右図の網点部となる。



この面積を S とすると，

$$S=\pi(r+2)^2-\pi(r-2)^2=8\pi r$$

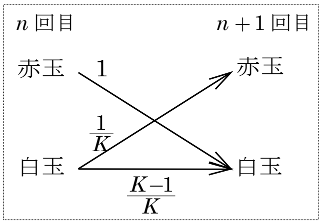
［解　説］

空間図形の軌跡についての問題です。(3)は，$r>2$ という条件から，D の通過領域がドーナツ形となります。

3

問題のページへ

与えられた試行を n 回繰り返した後, A の中の玉が赤玉である確率を p_n とすると, 白玉である確率は $1-p_n$ となる。A の中の玉について, 右の状態の推移図から,



$$p_{n+1}=\frac{1}{K}(1-p_n),\ \ p_{n+1}=-\frac{1}{K}p_n+\frac{1}{K}$$

変形すると, $p_{n+1}-\dfrac{1}{K+1}=-\dfrac{1}{K}\left(p_n-\dfrac{1}{K+1}\right)$となり,

$$p_n-\frac{1}{K+1}=\left(p_1-\frac{1}{K+1}\right)\left(-\frac{1}{K}\right)^{n-1}$$

$p_1=0$ から, $p_n=\dfrac{1}{K+1}-\dfrac{1}{K+1}\left(-\dfrac{1}{K}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{K+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{K}\right)^{n-1}\right\}$である。

［解　説］

確率と漸化式の基本題です。誘導がないので, 漸化式を立てるという方針を決めることが最も重要です。

4

問題のページへ

(1)　整数 $k,\ m$ と $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ に対して，

$$\left|k+m\omega\right|^2=(k+m\omega)(\overline{k+m\omega})=(k+m\omega)(k+m\overline{\omega})$$
$$=k^2+km(\omega+\overline{\omega})+m^2\left|\omega\right|^2=k^2-km+m^2$$

したがって，$\left|k+m\omega\right|^2$ は整数である。

(2)　自然数 L に対して，$\left|k\right|\leqq L\ (-L\leqq k\leqq L)$ のとき，

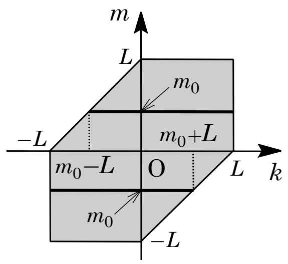
$$\left|k+\omega\right|^2=k^2-k+1=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

すると，$\left|k+\omega\right|^2$ は $k=-L$ のときに最大値 L^2+L+1 をとるので，$\left|k+\omega\right|$ の最大値は $\sqrt{L^2+L+1}$ となる。

(3)　$\left|k\right|\leqq L$，$\left|m\right|\leqq L$，$\left|k-m\right|\leqq L$ のとき，

$$-L\leqq k\leqq L,\ -L\leqq m\leqq L,\ k-L\leqq m\leqq k+L$$

この連立不等式を満たす点 $(k,\ m)$ を平面上に図示すると，右図の網点部内にある格子点が対応する。ただし，境界線上も含む。



さて，$m=m_0$ 上の $\left|k+m_0\omega\right|$ について，(1)から，

$$\left|k+m_0\omega\right|^2=k^2-m_0k+{m_0}^2=\left(k-\frac{m_0}{2}\right)^2+\frac{3}{4}{m_0}^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

このとき，$\left|k+m_0\omega\right|^2$ の最大値を M_0 とおく。

(i)　$0\leqq m_0\leqq L$ のとき　右上図から，k のとりうる値は $m_0-L\leqq k\leqq L$ である。

すると，$\dfrac{(m_0-L)+L}{2}=\dfrac{m_0}{2}$ なので，$(*)$から $k=m_0-L$ または $k=L$ で最大値 $M_0=L^2-m_0L+{m_0}^2$ をとる。そして，m_0 を $0\leqq m_0\leqq L$ で動かすと，

$$M_0={m_0}^2-Lm_0+L^2=\left(m_0-\frac{L}{2}\right)^2+\frac{3}{4}L^2$$

これより，M_0 は $m_0=0$ または $m_0=L$ のときに最大値 L^2 をとることから，

$$\left|k+m\omega\right|\leqq\sqrt{L^2}=L$$

(ii) $-L\leqq m_0\leqq 0$ のとき　右上図から，k のとりうる値は $-L\leqq k\leqq m_0+L$ である。

すると，$\dfrac{-L+(m_0+L)}{2}=\dfrac{m_0}{2}$ なので，$(*)$から $k=-L$ または $k=m_0+L$ で最大値 $M_0=L^2+m_0L+{m_0}^2$ をとる。そして，m_0 を $-L\leqq m_0\leqq 0$ で動かすと，

$$M_0={m_0}^2+Lm_0+L^2=\left(m_0+\frac{L}{2}\right)^2+\frac{3}{4}L^2$$

これより，M_0 は $m_0=-L$ または $m_0=0$ のときに最大値 L^2 をとることから，

$$\left|k+m\omega\right|\leqq\sqrt{L^2}=L$$

(i)(ii)より，$|k| \leqq L$，$|m| \leqq L$，$|k-m| \leqq L$ のとき，$|k+m\omega| \leqq L$ が成り立つ。

(4)　整数の組 $(k,\ m)$ について，$|k+m\omega| \leqq L$ を満たす個数を N，$|k| \leqq L$，$|m| \leqq L$，$|k-m| \leqq L$ を満たす個数を N' とおくと，(3)より $N \geqq N'$ である。

さて，N' は(3)の図の網点部内(境界線も含む)にある格子点の個数であり，

・ $m=0$ 上の格子点の個数　$L-(-L)+1=2L+1$

・ $m=m_0$ $(1 \leqq m_0 \leqq L)$ 上の格子点の個数　$L-(m_0-L)+1=2L+1-m_0$

k 軸に関する対称性を考えると，

$$N'=(2L+1)+2\sum_{m_0=1}^{L}(2L+1-m_0)=(2L+1)+2(2L+1)L-2\cdot\frac{1}{2}L(L+1)$$
$$=(2L+1)^2-L(L+1)=3L^2+3L+1$$

したがって，$N \geqq N'=3L^2+3L+1$ である。

［解　説］

複素数と格子点で味付けをした最大・最小問題です。(3)は，いわゆる 1 文字固定をして最大値を調べる設問です。また，(4)の不等式は，(3)との関連をもとに証明するものです。要演習の 1 題です。