1

解答解説のページへ

方程式$z^4+4=0$について，次の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1)　複素数-4を極形式で表し，$z^4+4=0$を満たす複素数をすべて求めよ。

(2)　$|w|^2=3$を満たす複素数 w と，$z^4+4=0$を満たす複素数αについて，$|\alpha+iw|^2+|\alpha-iw|^2$を求めよ。

(3)　t を実数とする。複素数平面における円$|z-t-5i|=5$の内部(ただし，境界線は含まない)に．$z^4+4=0$を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように，t の範囲を定めよ。

2

解答解説のページへ

k を正の実数とし，$x>0$ で定義された関数 $y=k(\log x)^2$ のグラフを C とする。y 軸上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$ をとる。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\left(p,\ k(\log p)^2\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通って，C にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。

(3)　点 A を通る C の 2 本の接線が垂直に交わるような k の値を求めよ。さらに，それぞれの接点の x 座標 p,q を求めよ。ただし，$p<q$ とする。

(4)　(3)で求めた k,p,q に対し，定積分 $\displaystyle\int_p^q k(\log x)^2\,dx$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

実数 p, q を係数とする 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が，実数解 α，β をもち，$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$ を満たすとする。ただし，$\alpha \leqq \beta$ とする。このとき，

$$M=\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}$$

を q の式で表し，M のとりうる最大値および最小値と，そのときの α，β の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし，A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば,

$$A_3=\{1,\ 3\},\ s_3=1+\frac{1}{3^2},\ A_4=\{1,\ 2,\ 4\},\ s_4=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}$$

である。p と q は異なる素数とし, k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　s_8，s_{12} の値を求めよ。

(2)　$n=p^k$ について，A_n の要素の個数を求めよ。

(3)　$n=p^kq^l$ について，$s_n<\dfrac{3}{2}$ を示せ。

1

問題のページへ

(1)　複素数-4を極形式で表すと，$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$となる。

　さて，$z^4+4=0$ $(z^4=-4)$の解を，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$とおく。ただし，$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$とする。このとき，$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$となり，

$$r^4=4,\ r=\sqrt{2}$$

また，$0\leqq4\theta<8\pi$から$4\theta=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi$となり，$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$

したがって，求める$z^4+4=0$の解は，

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i,\ z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+i$$

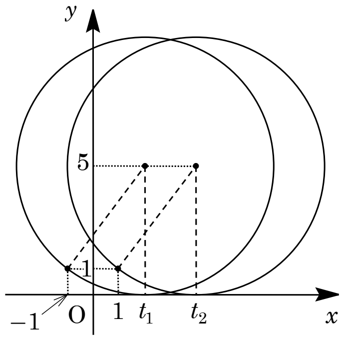
$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-1-i,\ z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-i$$

(2)　条件より$|w|^2=3$，また$\alpha^4+4=0$から$|\alpha|=\sqrt{2}$となり，このとき，

$$\begin{aligned}|\alpha+iw|^2+|\alpha-iw|^2&=(\alpha+iw)(\overline{\alpha}-i\overline{w})+(\alpha-iw)(\overline{\alpha}+i\overline{w})\\&=(\alpha\overline{\alpha}-i\alpha\overline{w}+i\overline{\alpha}w+w\overline{w})+(\alpha\overline{\alpha}+i\alpha\overline{w}-i\overline{\alpha}w+w\overline{w})\\&=2(\alpha\overline{\alpha}+w\overline{w})=2(|\alpha|^2+|w|^2)=2(2+3)=10\end{aligned}$$

(3)　実数tに対し，$|z-t-5i|=5$……(∗)で表される円は，中心$t+5i$で半径5なので，実軸に接している。

　これより，円(∗)の内部に$z^4+4=0$を満たす複素数が 1 つ含まれるとき，その複素数は$1+i$または$-1+i$となる。



　さて，虚軸に関する対称性から$t\geqq0$の場合で考え，円(∗)が点$-1+i$と通るとき中心t_1+5i，点$1+i$と通るとき中心t_2+5iとおくと，

$$(t_1+1)^2+(5-1)^2=5^2,\ (t_1+1)^2=9,\ t_1+1=\pm3$$

$t_1\geqq0$より$t_1=2$となり，$t_2=t_1+2=4$である。

　これより，円(∗)の内部に$1+i$だけが含まれるtの範囲は，$t_1\leqq t<t_2$である。

　そして，$t\leqq0$の場合も同様に考えると，円(∗)の内部に$-1+i$だけが含まれるtの範囲は，対称性から$-t_2<t\leqq-t_1$である。

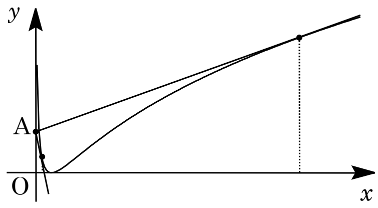
　以上より，求めるtの範囲は$-4<t\leqq-2$，$2\leqq t<4$である。

［解 説］

複素数平面上の図形に関する標準的な問題です。(1)の後半は$(z^2+2)^2-(2z)^2=0$として因数分解する有名な方法もあります。

2

問題のページへ



(1)　$C: y=k(\log x)^2$ に対し，$y'=\dfrac{2k}{x}\log x$ となり，

点$\left(p,\ k(\log p)^2\right)$における接線の方程式は,

$$y-k(\log p)^2=\frac{2k}{p}(\log p)(x-p)$$

$$y=\frac{2k}{p}(\log p)x+k(\log p)^2-2k\log p$$

(2)　(1)の接線が$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$を通ることより，$k(\log p)^2-2k\log p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e$となり，

$$2k(\log p)^2-4k\log p-\sqrt{3}e=0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$t=\log p$ とおくと，①より，$2kt^2-4kt-\sqrt{3}e=0\cdots\cdots\cdots②$

すると，点 A を通る C の接線の本数は，①を満たす p の個数が対応し，すなわち②を満たす t の個数となる。ここで，②の判別式を D とおくと，$k>0$ から，

$$D/4=4k^2+2\sqrt{3}ek>0$$

よって，点 A を通る C の接線は 2 本存在する。

(3)　②の解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$p=e^\alpha,\ e^\beta$ となる。

ここで，2 本の接線が垂直に交わることより，$\dfrac{2k}{e^\alpha}(\log e^\alpha)\cdot\dfrac{2k}{e^\beta}(\log e^\beta)=-1$

$$4k^2\alpha\beta=-e^\alpha e^\beta,\ 4k^2\alpha\beta=-e^{\alpha+\beta}$$

②から，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2k}e$ なので，$-4k^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2k}e=-e^2$ となり，

$$2\sqrt{3}k=e,\ k=\frac{1}{2\sqrt{3}}e=\frac{\sqrt{3}}{6}e$$

このとき，$\alpha\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}e\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{e}=-3$ となるので，$\alpha+\beta=2$ から$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 3)$

よって，$(p,\ q)=(e^\alpha,\ e^\beta)$ から，$p=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$，$q=e^3$ である。

(4)

$$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int 2x(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x(\log x)^2-2x\log x+2\int dx$$
$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C\quad(C\text{は積分定数})$$

ここで，$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{\sqrt{3}}{6}e(\log x)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{6}e\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}(\log x)^2dx$ とおくと，

$$I=\frac{\sqrt{3}}{6}e\Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e^3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}e\left\{(9e^3-6e^3+2e^3)-\left(\frac{1}{e}+\frac{2}{e}+\frac{2}{e}\right)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{6}e\left(5e^3-\frac{5}{e}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$$

［解 説］

接線の本数を題材にした頻出題です。(2)では複接線については触れていませんが，存在しないことは図から明らかでしょう。

3

問題のページへ

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ は実数解 α，β をもつので，$D=p^2-4q\geqq 0$ ………①

このとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ となり，$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$ から，

$$(-p)^2-2q-q=3,\ p^2=3q+3 \cdots\cdots\cdots ②$$

②より $3q+3\geqq 0$ から $q\geqq -1$，①に代入して $3q+3-4q\geqq 0$ から $q\leqq 3$

よって，$-1\leqq q\leqq 3$ である。このとき，

$$M=\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2+(\alpha\beta+3)+1}$$

$$=\frac{q}{q^2+q+4}$$

$$M'=\frac{(q^2+q+4)-q(2q+1)}{(q^2+q+4)^2}=\frac{-q^2+4}{(q^2+q+4)^2}=-\frac{(q+2)(q-2)}{(q^2+q+4)^2}$$

これより，$-1\leqq q\leqq 3$ における M の増減は右表のようになる。

q	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
M'		$+$	0	$-$	
M	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{5}$	$\searrow$	$\frac{3}{16}$

すると，M は $q=2$ のとき最大値 $\frac{1}{5}$ をとる。このとき，②から $p^2=9$ すなわち $p=\pm 3$ となり，$x^2\pm 3x+2=0$ の解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ は，$(\alpha,\ \beta)=(-2,\ -1)$，$(1,\ 2)$ である。

また，M は $q=-1$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。このとき，②から $p^2=0$ すなわち $p=0$ となり，$x^2-1=0$ の解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ は，$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$ である。

［解　説］

分数関数の増減についての基本的な問題です。

4

問題のページへ

(1)　自然数 n の正の約数全体の集合 A_n について，そのすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。

$A_8=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ より，$s_8=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{8^2}=\dfrac{85}{64}$

$A_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ より，$s_{12}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{12^2}=\dfrac{210}{144}=\dfrac{35}{24}$

(2)　p が素数のとき，$A_{p^k}=\{1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^k\}$ より，要素の個数は $k+1$ 個である。

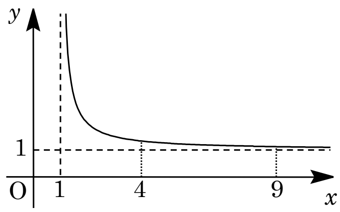
(3)　p, q が素数のとき，$A_{p^kq^l}$ の要素は p^iq^j $(0\leqq i\leqq k,\ 0\leqq j\leqq l)$ と表されるので，

$$s_n=s_{p^kq^l}=\sum_{j=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}q^{2j}}\Big)=\sum_{j=0}^{l}\Big(\frac{1}{q^{2j}}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}}\Big)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}$ より，

$$s_n=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{q^{2j}}\cdot\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{q^{2j}}$$
$$=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}\cdot\frac{q^2}{q^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{q^2}\Big)^{l+1}\Big\}<\frac{p^2}{p^2-1}\cdot\frac{q^2}{q^2-1}$$

ここで，$x>1$ において $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=1-\dfrac{1}{x-1}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



また，p と q は異なる素数より，$p\geqq 2$，$q\geqq 3$ としても一般性を失わないので，$p^2\geqq 4$，$q^2\geqq 9$ から，

$$1<\frac{p^2}{p^2-1}\leqq\frac{4}{3},\ 1<\frac{q^2}{q^2-1}\leqq\frac{9}{8}$$

すると，$1<\dfrac{p^2}{p^2-1}\cdot\dfrac{q^2}{q^2-1}\leqq\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}=\dfrac{3}{2}$ となり，$s_n<\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

集合と要素を題材にした問題です。(3)のシグマ計算はややこしそうですが，ある自然数を素因数分解して，その約数の和を求める方法と同じです。