1　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を，初項$a_1=-1$，$b_1=2$と漸化式

$$a_{n+1}=a_n-4b_n\,,\ b_{n+1}=a_n+5b_n$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=a_{n+1}-3a_n$とおくとき，数列$\{c_n\}$が漸化式$c_{n+1}=3c_n$を満たすことを示せ。

(2)　$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$とおくとき，数列$\{d_n\}$が満たす漸化式を導き，数列$\{d_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{\log x}{x^n}$ $(x>1)$ と定める。

$y=f_n(x)$ で表される曲線を C とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $x>1$ のとき，$\log x<x-1$ を示せ。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f_n(x)=0$ を示せ。

(2) 関数 $f_n(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 曲線 C の変曲点を求めよ。また，その変曲点における接線と y 軸との交点を $(0,\ y_n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

底面の半径が 1 で高さが 1 である直円柱を考える。直円柱の底面の直径を含みこの底面と30°の傾きをなす平面により，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，点 O を中心とする半径 1 の円周上にすべての頂点をもつ正 $2n$ 角形を考える。そのうちの 1 つの頂点を A とし, A とそれ以外の頂点を結ぶ線分が点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円と共有点をもつような頂点の個数を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) a_{2021} を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ を示せ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=-1$，$b_1=2$，$a_{n+1}=a_n-4b_n\cdots\cdots$①，$b_{n+1}=a_n+5b_n\cdots\cdots$②

①より $b_n=\dfrac{1}{4}(a_n-a_{n+1})$ となり，②に代入すると，

$$\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_{n+2})=a_n+\frac{5}{4}(a_n-a_{n+1}),\ \ a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n\cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，③から，

$$c_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}=(6a_{n+1}-9a_n)-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)=3c_n\cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　①より $a_2=a_1-4b_1=-1-4\cdot 2=-9$ となり，$c_1=a_2-3a_1=-9-3\cdot(-1)=-6$

④より $c_n=c_1\cdot 3^{n-1}=-6\cdot 3^{n-1}=-2\cdot 3^n$ となり，$a_{n+1}-3a_n=-2\cdot 3^n\cdots\cdots\cdots$⑤

さらに，$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，⑤から，

$$3^{n+1}d_{n+1}-3\cdot 3^n d_n=-2\cdot 3^n,\ \ d_{n+1}-d_n=-\frac{2}{3}$$

すると，$d_1=\dfrac{a_1}{3^1}=-\dfrac{1}{3}$ から，$d_n=d_1-\dfrac{2}{3}(n-1)=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}(n-1)=-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}$

(3)　$a_n=3^n d_n=3^n\left(-\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}\right)=-(2n-1)\cdot 3^{n-1}$ となり，①から，

$$b_n=\frac{1}{4}\{-(2n-1)\cdot 3^{n-1}+(2n+1)\cdot 3^n\}=\frac{1}{4}(-2n+1+6n+3)\cdot 3^{n-1}$$
$$=\frac{1}{4}(4n+4)\cdot 3^{n-1}=(n+1)\cdot 3^{n-1}$$

［解　説］

基本的な連立漸化式を解く問題です。誘導なしでもよいぐらいです。

2

問題のページへ

(1)　$x>1$ のとき，$g(x)=x-1-\log x$ とおくと，$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$ となり，

$$g(x)>g(1)=0,\ \log x<x-1$$

すると，n が 2 以上の自然数のとき，$f_n(x)=\dfrac{\log x}{x^n}\ (x>1)$ に対して，

$$0<\frac{\log x}{x^n}<\frac{x-1}{x^n}=\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f_n(x)=0$ となる。

(2)　$f_n{}'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^n-(\log x)\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\log x}{x^{n+1}}$

$f_n{}'(x)=0$ の解は，$x=e^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{e}$ であることより，$f_n(x)$ の増減は右表のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt[n]{e}$	$\cdots$
$f_n{}'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{ne}$	$\searrow$

すると，$f_n(x)$ は $x=\sqrt[n]{e}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{ne}$ をとる。

(3)　$f_n{}''(x)=\dfrac{-\frac{n}{x}\cdot x^{n+1}-(1-n\log x)\cdot(n+1)x^n}{x^{2n+2}}=\dfrac{-n-(n+1)(1-n\log x)}{x^{n+2}}$

$$=\frac{n(n+1)\log x-2n-1}{x^{n+2}}$$

$f_n{}''(x)=0$ の解は $x=e^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$ となり，$\alpha=e^{\frac{2n+1}{n(n+1)}}$ とおくと $\alpha>e^0=1$ であるので，曲線 $C: y=f_n(x)$ の凹凸は右表のようになる。すると，C の変曲点 P の座標は $\mathrm{P}(\alpha,\ f_n(\alpha))$ となり，

x	1	$\cdots$	α	$\cdots$
$f_n{}''(x)$		$-$	0	$+$
$f_n(x)$	0	$\cap$		$\cup$

$$\mathrm{P}\left(e^{\frac{2n+1}{n(n+1)}},\ \frac{2n+1}{n(n+1)e^{\frac{2n+1}{n+1}}}\right)$$

また，変曲点 P における接線の方程式は，$y-f_n(\alpha)=f_n{}'(\alpha)(x-\alpha)$ となり，点 $(0,\ y_n)$ を通ることより，$y_n-f_n(\alpha)=-\alpha f_n{}'(\alpha)$ から，

$$y_n=f_n(\alpha)-\alpha f_n{}'(\alpha)=\frac{\log\alpha}{\alpha^n}-\alpha\cdot\frac{1-n\log\alpha}{\alpha^{n+1}}$$

$$=\frac{2n+1}{n(n+1)e^{\frac{2n+1}{n+1}}}-\frac{1-n\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}}{e^{\frac{2n+1}{n+1}}}=\frac{2n+1}{n(n+1)e^{\frac{2n+1}{n+1}}}+\frac{n}{(n+1)e^{\frac{2n+1}{n+1}}}$$

すると，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\to 0$，$\dfrac{n}{n+1}\to 1$，$e^{\frac{2n+1}{n+1}}\to e^2$ より，

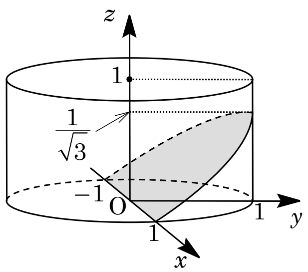
$$\lim_{n\to\infty}y_n=0+\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$$

［解 説］

微分法の基本的な問題です。ただ, (3)は数値計算がやや難ですが。

3

問題のページへ



底面が xy 平面上にあり，中心が原点で半径 1，そして高さ 1 の直円柱は,

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，x 軸を含み，xy 平面と $30°$ の傾きをなす平面の下側は，$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ から,

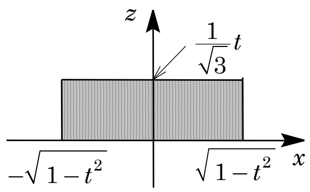
$$z \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} y \cdots\cdots\cdots ②$$

①かつ②で表される立体を，平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で切断したときの切り口は,

$$x^2+t^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ z \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} t$$

すると，$\frac{1}{\sqrt{3}} t \leqq 1$ から,

$$-\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} t$$



図示すると右図の網点部となり，この面積 $S(t)$ は,

$$S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} t = \frac{2}{\sqrt{3}} t\sqrt{1-t^2}$$

よって，求める立体の体積 V は，$V = \int_0^1 S(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$ となり，$u = 1-t^2$ とおくと，$du = -2t\,dt$ から

$$V = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^0 \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

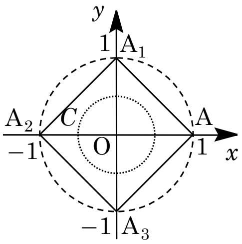
［解 説］

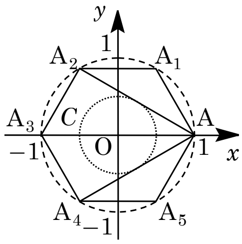
立体の体積についての有名問題です。解答例では y 軸に垂直な断面をとりましたが，x 軸に垂直な断面で考える方法もあります。

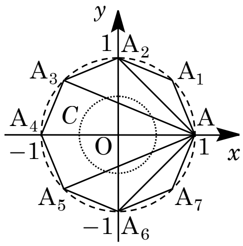
4　　　　問題のページへ

(1)　点 O を中心とする半径 1 の円周に内接する正 $2n$ 角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}\cdots\mathrm{A}_{2n}$ に対して，$\mathrm{A}=\mathrm{A}_{2n}$ とおく。そして，線分 AA_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1)$ が，点 O を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円 C と共有点をもつような頂点 A_k の個数を a_n とおく。

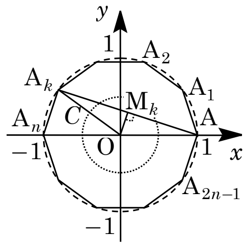
$n=2,\ 3,\ 4$ の場合を具体的に記すと右図のようになり，$a_2=1$，$a_3=3$ ，$a_4=3$ である。







(2)　正 $2n$ 角形 $\mathrm{A_1A_2A_3}\cdots\mathrm{A}_{2n}$ に対して，線分 AA_n は外接円の直径となるので，円 C と共有点をもつ。



ここで，線分 AA_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の中点 M_k に対し，

$$\angle\mathrm{AOM}_k=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOA}_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n}k=\frac{\pi}{2n}k$$

すると，$\mathrm{OM}_k=\mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{2n}k=\cos\dfrac{\pi}{2n}k$ となり，線分 AA_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ が円 C と共有点をもつ条件は，$0<\mathrm{OM}_k\leqq\dfrac{1}{2}$ から，

$$0<\cos\frac{\pi}{2n}k\leqq\frac{1}{2},\ \ \frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{2n}k<\frac{\pi}{2},\ \ \frac{2}{3}n\leqq k<n\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，線分 AA_k $(k=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1)$ が円 C と共有点をもつ A_k の個数は，x 軸についての対称性から，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ の場合と同数である。

さて，$n=2021$ のとき，$(*)$は $\dfrac{4042}{3}\leqq k<2021$ となり，$\dfrac{4042}{3}=1347+\dfrac{1}{3}$ から，

$$k=1348,\ 1349,\ \cdots,\ 2020$$

よって，$a_{2021}=1+(2020-1348+1)\times2=1347$ である。

(3)　(i)　n が 3 の倍数のとき　$(*)$より，$k=\dfrac{2}{3}n,\ \dfrac{2}{3}n+1\ \ \cdots,\ n-1$ となり，

$$a_n=1+\left(n-1-\frac{2}{3}n+1\right)\times2=\frac{2}{3}n+1$$

(ii)　n が 3 の倍数でないとき　$(*)$より，$k=\left[\dfrac{2}{3}n\right]+1,\ \left[\dfrac{2}{3}n\right]+2\ \ \cdots,\ n-1$ となり，

$$a_n=1+\left\{n-1-\left(\left[\frac{2}{3}n\right]+1\right)+1\right\}\times2=2n-2\left[\frac{2}{3}n\right]-1$$

ここで，$\dfrac{2}{3}n-1<\left[\dfrac{2}{3}n\right]\leqq\dfrac{2}{3}n$ なので，$2n-2\cdot\dfrac{2}{3}n-1\leqq a_n<2n-2\left(\dfrac{2}{3}n-1\right)-1$

$$\frac{2}{3}n-1\leqq a_n<\frac{2}{3}n+1$$

(i)(ii)より，$\dfrac{2}{3}n-1\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{3}n+1$ である。

したがって，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{a_n}{n} \leqq \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{n}$ となり，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$$

［解 説］

図形と極限の問題です。(1)を解くことにより，(2)と(3)の方針を立てています。