1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$ に対し，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ f(-1))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とする。関数 $h(x)$ を，$h(x)=x(x+1)(x-1)+g(x)$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 接線の方程式 $y=g(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ との共有点のうち，P と異なる点を Q とする。曲線 $y=h(x)$ が点 P, Q を通ることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上の$\triangle$ABC で$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{AC}=3$となるものを考え，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。また，辺 AC を$1:5$に内分する点を P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{ABC}$と$\cos\angle\mathrm{AOC}$の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$と$\cos\angle\mathrm{POC}$の値をそれぞれ求めよ。

(3)　内積$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の値を求めよ。

(4)　点 B と点 P を通る直線が$\triangle$ABC の外接円と交わる点で B と異なる点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

3　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　n を整数とするとき，1 次不定方程式 $3x+5y=n$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　0 以上 7 以下の整数 n のうち，0 以上の整数 x, y を用いて $n=3x+5y$ と表せないものの個数を求めよ。

(3)　8 以上のすべての整数 n は，0 以上の整数 x, y を用いて $n=3x+5y$ と表せることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+2x^2-4x-3$ に対して $f'(x)=3x^2+4x-4$ となり，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ f(-1))$ における接線の方程式は，$f(-1)=2$，$f'(-1)=-5$ から

$$y-2=-5(x+1),\quad y=-5x-3$$

(2)　$g(x)=-5x-3$ より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点は，$f(x)=g(x)$ から，

$$x^3+2x^2-4x-3=-5x-3,\quad x^3+2x^2+x=0,\quad x(x+1)^2=0$$

$\mathrm{P}(-1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(0,\ -3)$ となり，ここで，$h(x)=x(x+1)(x-1)+g(x)$ に対し，

$$h(-1)=g(-1)=2,\quad h(0)=g(0)=-3$$

これより，曲線 $y=h(x)$ は点 P, Q を通る。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ の共有点は，$f(x)=h(x)$ から，

$$x^3+2x^2-4x-3=x^3-x+(-5x-3),\quad 2x^2+2x=0,\quad 2x(x+1)=0$$

これより，$x=-1,\ 0$ となり，共有点は点 P, Q だけである。

ここで，$-1\leqq x\leqq 0$ において，$f(x)-h(x)=2x^2+2x=2x(x+1)\leqq 0$ となり，$f(x)\leqq h(x)$ から，曲線 $y=f(x)$ と $y=h(x)$ で囲まれる部分の面積 S は，

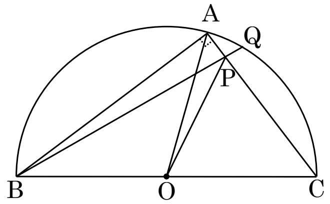
$$S=\int_{-1}^{0}\{h(x)-f(x)\}dx=\int_{-1}^{0}-2x(x+1)\,dx=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(0+1)^3=\frac{1}{3}$$

［解　説］

基本的な微積分の総合問題です。図を描くまでもありません。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle \mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{AC}=3$ より $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$ となり，$\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{4}{5}$ である。

また，外接円の中心 O は斜辺 BC の中点であり，

$$\cos\angle \mathrm{AOC}=\cos 2\angle \mathrm{ABC}=2\cos^2\angle \mathrm{ABC}-1$$

$$=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$$

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{5}{2}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{7}{4}$

さて，$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=1:5$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{6}(5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ となり，

$$|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=5^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+10\cdot\frac{7}{4}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{720}{4}=180$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1}{6}|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{180}=\sqrt{5}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{60}{24}=\dfrac{5}{2}$ から，

$$\cos\angle \mathrm{POC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3)　(2)から，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{5}{2}$

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=5-2\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{65}{4}$ となり，$\mathrm{BP}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ である。

ここで，方べきの定理から $\mathrm{BP}\cdot\mathrm{QP}=\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}$ となり，$\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{CP}=\dfrac{5}{2}$ から，

$$\mathrm{QP}=\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}=\frac{5}{2\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{26}$$

これより，$\mathrm{BP}:\mathrm{QP}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}:\dfrac{\sqrt{65}}{26}=13:1$ となり，点 Q は線分 BP を $(13+1):1$，すなわち $14:1$ に外分することより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+14\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{14-1}=-\frac{1}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{14}{13}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。上記の解答例以外に，いろいろな方法が考えられます。

3

問題のページへ

(1)　不定方程式 $3x+5y=n$ (n は整数)……①に対して，①を満たす 1 組の $(x,\ y)$ として，$(x,\ y)=(2n,\ -n)$ をとると，

$$3\cdot 2n+5\cdot(-n)=n \ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$3(x-2n)+5(y+n)=0$，$3(x-2n)=-5(y+n)$

3 と 5 は互いに素なので，k を整数として，$x-2n=5k$，$y+n=-3k$ と表せ，

$$x=5k+2n,\ \ y=-3k-n$$

(2)　整数 $x,\ y\,(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ を用いて，$n=3x+5y$ と表せる整数 n $(0\leqq n\leqq 7)$ について，$y\geqq 2$ のときは $n\geqq 10$ となり不適なので，$y=0,\ 1$ のときを考えると，

(i)　$y=0$ のとき

$n=3x$ かつ $0\leqq n\leqq 7$ から $x=0,\ 1,\ 2$ となり，$n=0,\ 3,\ 6$ を表すことができる。

(ii)　$y=1$ のとき

$n=3x+5$ かつ $0\leqq n\leqq 7$ から $x=0$ となり，$n=5$ を表すことができる。

(i)〜(ii)より，$n=3x+5y$ と表せる整数 n は，$n=0,\ 3,\ 5,\ 6$ である。

したがって，$n=3x+5y$ と表せない整数 n $(0\leqq n\leqq 7)$ は，$n=1,\ 2,\ 4,\ 7$ となり，その個数は 4 である。

(3)　整数 $x,\ y\,(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ を用いて，$n=3x+5y$ と表せる整数 n $(n\geqq 8)$ について，

(i)　$y=0$ のとき

$n=3x$ かつ $n\geqq 8$ から $x\geqq 3$ となり，n は 9 以上の 3 の倍数($n=9,\ 12,\ 15,\ \cdots$)を表すことができる。

(ii)　$y=1$ のとき

$n=3x+5=3(x+1)+2$ かつ $n\geqq 8$ から $x\geqq 1$ となり，n は 8 以上の 3 で割った余りが 2 の整数($n=8,\ 11,\ 14,\ \cdots$)を表すことができる。

(iii)　$y=2$ のとき

$n=3x+10=3(x+3)+1$ かつ $n\geqq 8$ から $x\geqq 0$ となり，n は 10 以上の 3 で割った余りが 1 の整数($n=10,\ 13,\ 16,\ \cdots$)を表すことができる。

(i)〜(iii)より，$n=3x+5y$ は 8 以上のすべての整数を表すことができる。

［解　説］

有名な整数問題の 1 つです。なお，2000 年度の阪大・理系に誘導なしで同じ問題が出題されていますので「2 次数学ランドマーク／整数と数列」を参照してください。