$\boxed{1}$　解答解説のページへ

1 個のサイコロを 3 回投げ，出た目を順に a，b，c とする。座標平面上に 3 点 A$(a,\ 1)$，B$(-b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ を定め，それらを頂点とする△ABC を考える。ただし，サイコロは 1 から 6 までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積の値が整数となる確率を求めよ。

(2)　△ABC が直角三角形となる確率を求めよ。

(3)　△ABC が二等辺三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

実数 k と複素数 z（ただし，$z \neq -1$）に対して，$w = \dfrac{z+k}{z+1}$ とする。また，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$k=0$ とする。$z=0$ に対する w の値を α，$z=1$ に対する w の値を β，$z=\sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

(2)　$k=-1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3)　$k \neq 1$ とする。複素数平面において，点 z が虚軸上を動くとき，点 w の描く図形を F とする。F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上に 2 つの定点 O と U があり，$\mathrm{OU}=3$ を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形△STU があり，辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A, B とする。△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が△STU の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ△STU の内部および周上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$-2\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2 < 10$ を用いてよい。

(1)　$f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\ \pi]$ で増加することを示せ。

(2)　開区間 $(-2\pi,\ \pi)$ で，つねに $f(x) > x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4)　$f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2 つの曲線

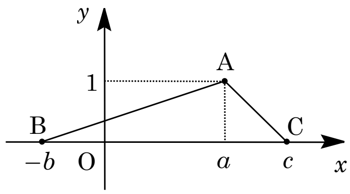
$$C_1 : y = f(x)\ (0 \leqq x \leqq \pi),\ \ C_2 : y = f^{-1}(x)\ \left(f(0) \leqq x \leqq f(\pi)\right)$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x + y = f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　1 個のサイコロを 3 回投げ，出た目を順に $a,\ b,\ c$ とするとき，3 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$，$\mathrm{B}(-b,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ に対して，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は，



$$S=\frac{1}{2}(c+b)\cdot 1=\frac{b+c}{2}$$

S が整数となるのは，$b+c$ が偶数，すなわち c が b と偶奇の一致する場合より，その確率は $\dfrac{6\times6\times3}{6^3}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形となる場合は，$\mathrm{H}(a,\ 0)$ とおくと，

(i)　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき　$a=-b$ となり成立しない。

(ii)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき　$a\geqq c$ のときは不成立なので，$a<c$ のもとで，

$$\tan\angle\mathrm{BAH}=a+b\geqq 2,\ \tan\angle\mathrm{CAH}=c-a\geqq 1$$

これより，$\angle\mathrm{BAH}>45^\circ$，$\angle\mathrm{CAH}\geqq 45^\circ$ となり，$\angle\mathrm{BAC}>90^\circ$ から成立しない。

(iii)　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき　$c=a$ となり，その確率は $\dfrac{6\times6\times1}{6^3}=\dfrac{1}{6}$ となる。

(i)〜(iii)より，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形となる確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

(3)　まず，$c=a$ のときは，$\mathrm{AC}=1$ であるが $\mathrm{BC}\geqq 2$ なので $\mathrm{AC}<\mathrm{BC}<\mathrm{AB}$ となる。

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 辺の長さは，$c\neq a$ のとき，

$$\mathrm{BC}=c+b,\ \mathrm{AB}=\sqrt{(a+b)^2+1},\ \mathrm{AC}=\sqrt{|a-c|^2+1}$$

ここで，一般的に p を自然数とするとき，$p<\sqrt{p^2+1}<p+1$ であるので，AB，AC は自然数ではない。これより，$\mathrm{BC}\neq\mathrm{AB}$，$\mathrm{BC}\neq\mathrm{AC}$ となる。

すると，$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形となるのは，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の場合だけであり，

$$(a+b)^2+1=|a-c|^2+1,\ 2ab+b^2=-2ac+c^2$$

変形すると，$2a(b+c)+(b+c)(b-c)=0$ となり，$b+c>0$ から，

$$2a+b-c=0,\ a=\frac{c-b}{2}$$

ここで，$-5\leqq c-b\leqq 5$ から $-\dfrac{5}{2}\leqq\dfrac{c-b}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ となり，$a=1,\ 2$ である。

(i)　$a=1$ のとき　$(b,\ c)=(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 6)$

(ii)　$a=2$ のとき　$(b,\ c)=(1,\ 5),\ (2,\ 6)$

(i)(ii)より，$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形となる確率は，$\dfrac{4+2}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

［解　説］

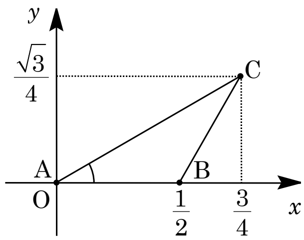
確率と整数の融合問題です。(2)と(3)については，いろいろな方法が考えられます。

© 電送数学舎 2020

2　　問題のページへ

(1)　複素数 z に対して，$w=\dfrac{z}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$z=0$ に対して $w=\alpha=0$，$z=1$ に対して $w=\beta=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，$z=\sqrt{3}i$ に対して $w=\gamma=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i+1}=\dfrac{\sqrt{3}i(-\sqrt{3}i+1)}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}$



そこで，複素数平面上に 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を定めると，右図から，

$\angle\mathrm{BAC}=\arg\gamma=\dfrac{\pi}{6}$

(2)　複素数 z に対して，$w=\dfrac{z-1}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$(z+1)w=z-1$ から $(w-1)z=-w-1$ となり，$w=1$ では不成立より，

$z=-\dfrac{w+1}{w-1}$　$(w\neq 1)$

条件より，$|z|=\sqrt{2}$ なので，$\left|-\dfrac{w+1}{w-1}\right|=\sqrt{2}$ となり，$|w+1|=\sqrt{2}|w-1|$ から，

$|w+1|^2=2|w-1|^2$，$(w+1)(\overline{w}+1)=2(w-1)(\overline{w}-1)$

まとめると，$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+1=0$ となり，$(w-3)(\overline{w}-3)=8$ から，

$|w-3|^2=8$，$|w-3|=2\sqrt{2}$

よって，点 w の描く図形は，中心が点 3 で半径が $2\sqrt{2}$ の円である。なお，このとき $w\neq 1$ は満たしている。

(3)　実数 $k\,(k\neq 1)$ と複素数 z に対して，$w=\dfrac{z+k}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$(z+1)w=z+k$ から $(w-1)z=-w+k$ となり，$w=1$ は不成立より，

$z=-\dfrac{w-k}{w-1}$　$(w\neq 1)$

点 z は虚軸上を動くので，$z+\overline{z}=0$ から，$-\dfrac{w-k}{w-1}-\dfrac{\overline{w}-k}{\overline{w}-1}=0$ となり，

$(w-k)(\overline{w}-1)+(w-1)(\overline{w}-k)=0$

まとめると，$2w\overline{w}-(k+1)w-(k+1)\overline{w}+2k=0$ となり，

$w\overline{w}-\dfrac{k+1}{2}w-\dfrac{k+1}{2}\overline{w}+k=0$，$\left(w-\dfrac{k+1}{2}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{k+1}{2}\right)=\dfrac{(k+1)^2}{4}-k$

これより，$\left|w-\dfrac{k+1}{2}\right|^2=\dfrac{(k-1)^2}{4}$，$\left|w-\dfrac{k+1}{2}\right|=\dfrac{|k-1|}{2}$ と変形すると，点 w の描く図形を F は，$k\neq 1$ から，中心が点 $\dfrac{k+1}{2}$ で半径が $\dfrac{|k-1|}{2}$ の円である。

そして，条件から，F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれることより，

© 電送数学舎 2020

$$\frac{|k-1|}{2}=\frac{1}{2},\ \ |k-1|=1$$

よって，求める k の値は，$k-1=\pm1$ から $k=0,\ 2$ である。

［解　説］

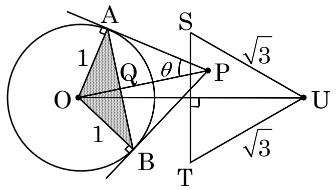
複素数と図形についての頻出タイプの問題です。なお，(3)の「円の周に含まれる」という問題文には注意が必要です。

© 電送数学舎 2020

3

問題のページへ

右図のように，点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 STU がある。$\mathrm{OU}=3$ のとき，△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線 PA, PB を引く。



さて，辺 ST は線分 OU を垂直に二等分し，$\mathrm{OP}=x$，$\angle\mathrm{APO}=\theta$ とおくと，$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ のもとで $\sin\theta=\dfrac{1}{x}$ となる。また，OP と AB の交点を Q とおくと，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{OP}$ から $\angle\mathrm{OAQ}=\theta$ となり，

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}\sin\theta=\frac{1}{x},\ \ \mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=\mathrm{OA}\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

すると，△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\pi\mathrm{AQ}^2\cdot\mathrm{OQ}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3}$$

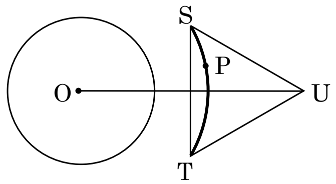
$$V'=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{-x^2+3}{x^4}$$

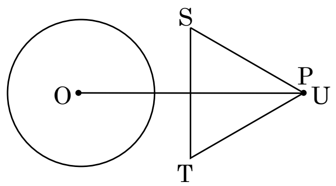
x	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V	$\frac{10}{81}\pi$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$	↘	$\frac{8}{81}\pi$

これより，$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ における V の増減は右上表のようになり，V は $x=\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ をとり，$x=3$ のとき最小値 $\dfrac{8}{81}\pi$ をとる。

また，V が最大値をとるような点 P の存在範囲は，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$ から，点 O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円のうち，△STU の内部および周上の部分である。$\mathrm{OS}=\mathrm{OT}=\sqrt{3}$ に留意すると，右図の太線部となる。



さらに，V が最小値をとるような点 P の存在範囲は，$\mathrm{OP}=3$ から，点 O を中心とする半径 3 の円のうち，△STU の内部および周上の部分である。$\mathrm{OU}=3$ から，点 P が点 U と一致する場合となる。



［解　説］

微分と最大・最小についての問題です。最初，座標系を設定しようかとも思いましたが，それには及びませんでした。

© 電送数学舎 2020

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ $(-2\pi\leqq x\leqq\pi)$に対して，

$$f(x)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$$

ここで，$-2\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となるので，$\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$の値は単調に増加する。すなわち，$f(x)$は閉区間$[-2\pi,\ \pi]$で増加する。

(2)　$g(x)=f(x)-x$ とおくと，$g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{9}\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

ここで，$\pi^2<10$ から $8\pi^2<80<81$ となり，$2\sqrt{2}\pi<9$ から $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{9}<1$ である。

すると，$-2\pi<x<\pi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}\right)$において，$g'(x)<0$ となるので，

$$g(x)>g(\pi)=f(\pi)-\pi=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}-\pi=0$$

よって，開区間$(-2\pi,\ \pi)$で $f(x)>x$ が成り立つ。

(3)　$I=\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)}f^{-1}(x)dx$ に対して，$t=f^{-1}(x)$ すなわち $x=f(t)$ とおく。

すると，$dx=f'(t)dt$ となり，$x=f(0)\to f(\pi)$ は $t=0\to\pi$ に対応し，

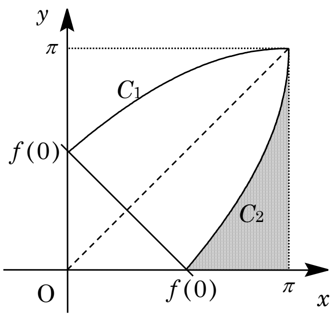
$$I=\int_0^{\pi}tf'(t)dt=\left[tf(t)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(t)dt$$

$$=\pi f(\pi)-\left[-2\sqrt{2}\pi\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}x\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi\cdot\pi+2\sqrt{2}\pi\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}\cdot\pi=\pi^2-\sqrt{6}\pi-\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi^2$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2-\sqrt{6}\pi$$

(4)　直線 $x+y=f(0)$ と $C_1:y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$C_2:y=f^{-1}(x)$ $(f(0)\leqq x\leqq f(\pi))$で囲まれた図形の面積を S とおく。すると，網点部の面積が(3)の I の値に対応し，さらに直線 $y=x$ についての対称性から，



$$S=\pi^2-\frac{1}{2}\{f(0)\}^2-2I$$

$f(0)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}=\dfrac{3-\sqrt{2}}{3}\pi$ から，

$$S=\pi^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{2}}{3}\pi\right)^2-2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2-\sqrt{6}\pi\right)$$

$$=\pi^2-\frac{11-6\sqrt{2}}{18}\pi^2-\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^2+2\sqrt{6}\pi=\frac{7-18\sqrt{2}}{18}\pi^2+2\sqrt{6}\pi$$

© 電送数学舎 2020

［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。(3)の定積分の値を，(4)で利用する点がポイントです。

© 電送数学舎 2020