1

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{CAB}=\theta$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=\sqrt{5}$ とする。点 B から辺 AC に下ろした垂線を BP とする。線分 BP 上に点 B とは異なる点 Q を，また Q から辺 BC に下ろした垂線 QR を $\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $|\vec{b}+\vec{c}|$ の値を求めよ。

(3) PQ の長さを求めよ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

実数 x に対して，関数 $f(x)=8^x-4^{x+\frac{1}{2}}+2^x+\dfrac{23}{27}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$2^x=t$ とおいて，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　(1)で求めた t の式を $g(t)$ とおく。$t>0$ のとき，関数 $y=g(t)$ のグラフをかけ。

(3)　$a>-2$ とする。$-2\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値が 1 となるような a の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で関数 $y=x^2-6$ のグラフを C_1，関数 $y=-\dfrac{|x|}{\sqrt{3}}+8$ のグラフを C_2 とする。次の問いに答えよ。

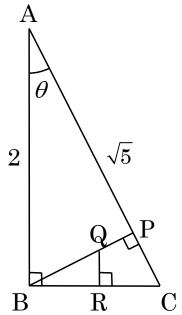
(1)　C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。C_1 と C_2 で囲まれた図形内（周上も含める）にある格子点の個数を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　右図の△ABC において，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，(1)から，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=4$$

また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2=2^2+2\cdot4+(\sqrt{5})^2=17$ となり，$|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{17}$

(3)　まず，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ から，$\mathrm{BP}=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

ここで，$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=x$ とおくと $\mathrm{BQ}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}-x$ となり，$\angle\mathrm{PBC}=\theta$ から，

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-x\right)\sin\theta=x\,,\ \ \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}x=x\,,\ \ (5+\sqrt{5})x=2$$

よって，$\mathrm{PQ}=x=\dfrac{2}{5+\sqrt{5}}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ となる。

(4)　(3)から，$\mathrm{BQ}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}-\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}=\dfrac{5\sqrt{5}-5}{10}=\dfrac{(5-\sqrt{5})\sqrt{5}}{10}$ となり，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{PQ}=\sqrt{5}:1$$

また，$\mathrm{AP}=2\cos\theta=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{4}{5}\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\sqrt{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\sqrt{5}+1}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}\vec{b}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{4}{5}\vec{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{b}+\frac{5-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{4}{5}\vec{c}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{b}+\frac{5-\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

［解　説］

三角比とベクトルの融合問題です。直角三角形が対象なので，相似を利用した解法も考えられます。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=8^x-4^{x+\frac{1}{2}}+2^x+\dfrac{23}{27}=2^{3x}-2^{2x+1}+2^x+\dfrac{23}{27}$ に対して，$2^x=t$ とおくと，

$$f(x)=(2^x)^3-(2^x)^2\cdot 2+2^x+\frac{23}{27}=t^3-2t^2+t+\frac{23}{27}$$

(2)　$f(x)=g(t)$ とおくと，(1)から，

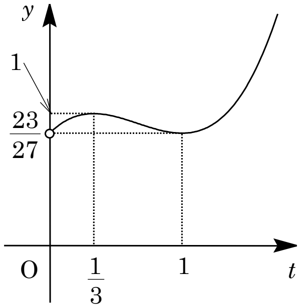
$$g(t)=t^3-2t^2+t+\frac{23}{27}$$

$$g'(t)=3t^2-4t+1$$

$$=(3t-1)(t-1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\frac{23}{27}$	↗	1	↘	$\frac{23}{27}$	↗

すると，$t>0$ のとき，$g(t)$ の増減は右表のようになり，これより $y=g(t)$ のグラフは右図の通りである。



(3)　まず，$g(t)=1$ とおくと，$t^3-2t^2+t-\dfrac{4}{27}=0$ から，

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)^2\left(t-\frac{4}{3}\right)=0$$

これより，$t=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{4}{3}$ となる。

さて，$-2\leqq x\leqq a$ $(a>-2)$ における $f(x)$ の最大値が 1 という条件は，$\dfrac{1}{4}=2^{-2}\leqq t\leqq 2^a$ における $g(t)$ の最大値が 1 であることに対応し，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}$ に注意すると，(2)のグラフから，a の値の範囲は $\dfrac{1}{3}\leqq 2^a\leqq\dfrac{4}{3}$ となり，

$$\log_2\frac{1}{3}\leqq a\leqq\log_2\frac{4}{3},\ -\log_2 3\leqq a\leqq 2-\log_2 3$$

［解　説］

指数関数と微分と増減の融合題です。誘導が丁寧ですので，(3)の方針についても迷いはないでしょう。

3

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2 - 6$ ……①，$C_2 : y = -\dfrac{|x|}{\sqrt{3}} + 8$ は，ともに y 軸対称なので，以下，$x \geqq 0$ において連立すると，

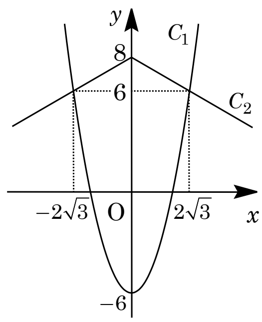
$$x^2 - 6 = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 8,\ \sqrt{3}x^2 + x - 14\sqrt{3} = 0$$

すると，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{169}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-1 \pm 13}{2\sqrt{3}}$ となり，$x \geqq 0$ から $x = \dfrac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

また，$y = (2\sqrt{3})^2 - 6 = 6$ となり，C_1 と C_2 の共有点の座標は，y 軸対称性から，

$(2\sqrt{3},\ 6)$，$(-2\sqrt{3},\ 6)$

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，対称性から，



$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left\{\left(-\frac{x}{\sqrt{3}} + 8\right) - (x^2 - 6)\right\}dx \\ &= 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left(-x^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} + 14\right)dx \\ &= 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2\sqrt{3}} + 14x\right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= 2(-8\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 28\sqrt{3}) = 36\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の内部または周上にある格子点について，$3 < 2\sqrt{3} < 4$ に注意して，その個数を調べると，

(i)　$x = 0$ 上　$8 - (-6) + 1 = 15$（個）

(ii)　$x = 1$ 上　$\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 8\right] - (-5) + 1 = \left[8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right] + 6 = 7 + 6 = 13$（個）

(iii)　$x = 2$ 上　$\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 8\right] - (-2) + 1 = \left[8 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right] + 3 = 6 + 3 = 9$（個）

(iv)　$x = 3$ 上　$\left[-\dfrac{3}{\sqrt{3}} + 8\right] - 3 + 1 = [8 - \sqrt{3}] - 2 = 6 - 2 = 4$（個）

(i)〜(iv)より，C_1 と C_2 の y 軸対称性を考えあわせると，求める格子点の個数は，

$15 + (13 + 9 + 4) \times 2 = 67$（個）

［解 説］

y 軸対称な C_1 と C_2 を題材とした問題で，面積計算も格子点の個数を数えるのも容易です。なお，(3)では，記述を簡略化するため，いわゆるガウス記号を使いました。