1　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　方程式$13x+9y=1$の整数解をすべて求めよ。

(2)　不等式$|t(t+300)| \leqq 20000$を満たす実数tの値の範囲を求めよ。

(3)　(2)で求めた範囲に含まれる整数の個数を求めよ。ただし，必要ならば$4.12<\sqrt{17}<4.13$を用いてよい。

(4)　13 で割ると 11 余り，9 で割ると 7 余るような整数で，(2)で求めた範囲に含まれるものは何個あるか。また，そのうち最小となるものを求めよ。

2

解答解説のページへ

k を 0 以上の定数とし，3 次関数

$$f(x)=x^3-(2k+1)x^2-(k^3-8k)x+(k^3-6k)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$ を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3)　k が 0 以上の実数全体を動くとき，$f(0)$ のとり得る値の最小値は $-4\sqrt{2}$ であることを示せ。また，$f(0)=-4\sqrt{2}$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，座標が $(\cos\theta_n,\ \sin\theta_n)$ である単位円上の点 P_n が次の規則(i), (ii)で定められている。

(i)　$\theta_1=0$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$ とし，各 n について，$\theta_n<\theta_{n+1}<\theta_{n+2}<\theta_n+2\pi$ が成り立つ。

(ii)　各 n について，P_{n+2} は，P_n，P_{n+1} を両端とする 2 つの弧のうち，P_{n+2} を含む弧を二等分する点である。

このように定めるとき，$\theta_3=\dfrac{7}{6}\pi$ であることがわかる。次の問いに答えよ。

(1)　θ_4，θ_5 を求めよ。

(2)　$\theta_{n+1}-\theta_n=\beta_n$ とおくとき，$\beta_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\beta_n+\pi$ を示し，数列 $\{\beta_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　方程式$13x+9y=1$……①を満たす 1 つの整数解は，$(x,\ y)=(-2,\ 3)$ より，

$$13\times(-2)+9\times3=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$13(x+2)+9(y-3)=0$ から，$13(x+2)=-9(y-3)$

13 と 9 は互いに素なので，k を整数として，$x+2=-9k$，$y-3=13k$ となり，

$$x=-9k-2,\ y=13k+3$$

(2)　不等式$|t(t+300)|\leqq20000$……③から，$-20000\leqq t(t+300)\leqq20000$ となり，

$$t(t+300)\geqq-20000\ \cdots\cdots\cdots④,\ t(t+300)\leqq20000\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$t^2+300t+20000\geqq0$ となり，$(t+100)(t+200)\geqq0$ から，

$$t\leqq-200,\ -100\leqq t$$

⑤より，$t^2+300t-20000\leqq0$ となり，$-150-50\sqrt{17}\leqq t\leqq-150+50\sqrt{17}$

すると，③を満たす t の値の範囲は，

$$-150-50\sqrt{17}\leqq t\leqq-200\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ -100\leqq t\leqq-150+50\sqrt{17}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(3)　$4.12<\sqrt{17}<4.13$ から，$206<50\sqrt{17}<206.5$ となるので，

$$-356.5<-150-50\sqrt{17}<-356,\ 56<-150+50\sqrt{17}<56.5$$

これより，⑥を満たす整数は$-200-(-356)+1=157$ 個，⑦を満たす整数は$56-(-100)+1=157$ 個となり，③を満たす整数は$157+157=314$ 個である。

(4)　13 で割ると 11 余り，9 で割ると 7 余るような整数 n は，l, m を整数として，

$$n=13l+11\ \cdots\cdots\cdots⑧,\ n=9m+7\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧⑨より，$13l+11=9m+7$ となり，$13l-9m=-4$ ………⑩

⑩を満たす 1 つの整数解は，$(x,\ y)=(-1,\ -1)$ より，

$$13\times(-1)-9\times(-1)=-4\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

⑩⑪より，$13(l+1)-9(m+1)=0$ から，$13(l+1)=9(m+1)$

13 と 9 は互いに素なので，k' を整数として，$l+1=9k'$，$m+1=13k'$ となり，

$$n=13(9k'-1)+11=117k'-2$$

そして，(2)で求めた範囲に含まれる整数 n は，

$$-356\leqq117k'-2\leqq-200\ \cdots\cdots\cdots⑫,\ -100\leqq117k'-2\leqq56\ \cdots\cdots\cdots⑬$$

⑫より $k'=-3,\ -2$，⑬より $k'=0$ なので，条件を満たす n は合わせて 3 個となり，その中で最小の数は，$117\times(-3)-2=-353$ である。

［解 説］

整数を題材とした基本的な小問 4 題という構成です。なお，(4)と(1)の関連は特殊解なのでしょうか。

$\boxed{2}$　問題のページへ

(1)　$k \geqq 0$ のとき，$f(x) = x^3 - (2k+1)x^2 - (k^3 - 8k)x + (k^3 - 6k)$ に対して，

$$f(1) = 1 - (2k+1) - (k^3 - 8k) + (k^3 - 6k) = 0$$

(2)　(1)より，$f(x)$ は $x-1$ で割り切れ，$f(x) = (x-1)(x^2 - 2kx - k^3 + 6k)$

さて，$f(x) = 0$ が虚数解をもつ条件は，$x^2 - 2kx - k^3 + 6k = 0$ の判別式 D が，

$$D/4 = k^2 - (-k^3 + 6k) = k^3 + k^2 - 6k = k(k+3)(k-2) < 0$$

すると，$k \geqq 0$ より，$0 < k < 2$ ……(＊)である。

(3)　$g(k) = f(0) = k^3 - 6k$ とおくと，

$$g'(k) = 3k^2 - 6 = 3(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$$

すると，$k \geqq 0$ における $g(k)$ の増減は右表のようになる。

k	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(k)$		$-$	0	$+$
$g(k)$		↘	$-4\sqrt{2}$	↗

これより，$g(k)$ すなわち $f(0)$ の最小値は $-4\sqrt{2}$ である。

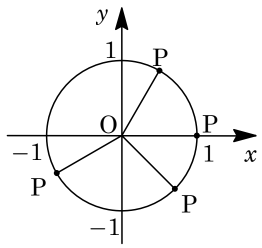
また，$f(0) = -4\sqrt{2}$ のときは $k = \sqrt{2}$ となり，この値は(＊)を満たす。これより，方程式 $f(x) = 0$ の実数解は $x = 1$ のみとなり，その個数は 1 個である。

［解　説］

3 次方程式および微分と増減についての超基本題です。

3

問題のページへ



(1)　条件より，$\mathrm{P}_n(\cos\theta_n,\ \sin\theta_n)$ に対し，$\theta_1=0$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$ で，

$$\theta_n<\theta_{n+1}<\theta_{n+2}<\theta_n+2\pi$$

さらに，P_{n+2} は，P_n，P_{n+1} を両端とする 2 つの弧のうち，P_{n+2} を含む弧を二等分する点なので，$\theta_3=\dfrac{7}{6}\pi$ となり，

$$\theta_4=\theta_3+\frac{1}{2}\{2\pi-(\theta_3-\theta_2)\}$$

$$=\frac{7}{6}\pi+\frac{1}{2}\left\{2\pi-\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{7}{6}\pi+\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{4}\pi$$

$$\theta_5=\theta_4+\frac{1}{2}\{2\pi-(\theta_4-\theta_3)\}=\frac{7}{4}\pi+\frac{1}{2}\left\{2\pi-\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{7}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{7}{4}\pi+\frac{17}{24}\pi=\frac{59}{24}\pi$$

(2)　(1)と同様に考えると，$\theta_{n+2}=\theta_{n+1}+\dfrac{1}{2}\{2\pi-(\theta_{n+1}-\theta_n)\}$ となり，

$$\theta_{n+2}-\theta_{n+1}=\pi-\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)$$

ここで，$\theta_{n+1}-\theta_n=\beta_n$ とおくと，$\beta_1=\dfrac{\pi}{3}-0=\dfrac{\pi}{3}$ で，$\beta_{n+1}=\pi-\dfrac{1}{2}\beta_n$ となり，

$$\beta_{n+1}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\left(\beta_n-\frac{2}{3}\pi\right)$$

すると，$\beta_n-\dfrac{2}{3}\pi=\left(\beta_1-\dfrac{2}{3}\pi\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{3}\pi\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ から，

$$\beta_n=-\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\pi=\left\{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right\}\pi$$

(3)　(2)より，$n\geqq 2$ において，

$$\theta_n=\theta_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}\pi\right\}=-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\pi(n-1)$$

$$=-\frac{2}{9}\pi\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{2}{3}n\pi-\frac{2}{3}\pi=\left\{\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}n-\frac{8}{9}\right\}\pi$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

漸化式の応用についての標準的な問題です。題意が把握できれば，立式は難しくありません。