

1

解答解説のページへ

1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に  $a, b, c, d$  とおき, 2 直線  $l_1, l_2$  を  $l_1: y = ax + b, l_2: y = cx + d$  と定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $l_1$  と  $l_2$  が一致する確率を求めよ。
- (2)  $l_1$  と  $l_2$  が 1 点で交わる確率を求めよ。
- (3)  $l_1$  と  $l_2$  が 1 点で交わり, その交点の  $x$  座標,  $y$  座標がともに整数となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a, k$  を定数とし、曲線  $C_1 : y = e^x$  および曲線  $C_2 : y = k\sqrt{x-a}$  を考える。次の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線  $C_1, C_2$  が共有点をもつための、 $a, k$  が満たすべき条件を求めよ。

以下、2つの曲線  $C_1, C_2$  が共有点  $P(t, e^t)$  において同一の直線  $l$  に接しているとする。

(2)  $a$  と  $k$  を  $t$  を用いて表せ。

(3) 直線  $l$  が原点を通るとする。このとき、曲線  $C_1$ 、曲線  $C_2$ 、 $x$  軸、 $y$  軸で囲まれる図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a, b, c$  を正の数とする。楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  が、4 点  $(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)$  を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を  $S$ 、楕円  $C$  で囲まれる図形の面積を  $T$  とする。このとき、不等式  $\frac{S}{T} \leq \frac{2}{\pi}$  が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

4

解答解説のページへ

座標空間において、原点  $(0, 0, 0)$  と点  $(1, 1, -3)$  を通る直線を  $l$ 、2 つの点  $(-6, 6, 0)$ 、 $(1, 2, 1)$  を通る直線を  $m$  とする。直線  $l$  上の点  $P$  と直線  $m$  上の点  $Q$  を、直線  $PQ$  が直線  $l, m$  のいずれにも直交するようにとる。次の問いに答えよ。

- (1)  $|\overline{PQ}|$  を求めよ。
- (2)  $A$  を直線  $l$  上の点、 $B$  を直線  $m$  上の点とする。ただし、 $A \neq P$  とする。このとき、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$  であることを示せ。
- (3) 直線  $l$  上の 2 点  $A, C$  をそれらの中点が  $P$  となるようにとる。同様に、直線  $m$  上の 2 点  $B, D$  をそれらの中点が  $Q$  となるようにとる。 $|\overline{PA}| = a$ 、 $|\overline{QB}| = b$  のとき、三角形  $BDP$  の面積と四面体  $ABCD$  の体積を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) サイコロを4回投げ、出た目の数を順に  $a, b, c, d$  とおき、2直線  $l_1: y = ax + b$ ,  $l_2: y = cx + d$  を対応させる。

このとき、 $l_1$  と  $l_2$  が一致するのは、 $a = c$  かつ  $b = d$  の場合より、その確率は、

$$\frac{6 \times 6 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{1}{36}$$

- (2)  $l_1$  と  $l_2$  が平行または一致のときは  $a = c$  より、その確率は  $\frac{6 \times 6 \times 1 \times 6}{6^4} = \frac{1}{6}$  となる

ので、 $l_1$  と  $l_2$  が1点で交わる確率は、 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  である。

- (3)  $a \neq c$  のとき、 $l_1$  と  $l_2$  が1点で交わり、その交点は  $ax + b = cx + d$  から、

$$(a - c)x = -b + d, \quad x = -\frac{b - d}{a - c} \dots\dots\dots(*)$$

そして、交点の  $x$  座標が整数であるとき、 $y = ax + b$  から  $y$  座標も整数となるので、以下、(\*)が整数となる条件を求める。

さて、一般的に2つの数  $p, q$  とその差  $p - q$  をまとめると右表のようになり、これを参照して、

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

- (i)  $a - c = \pm 1$  のとき

$(a, c)$  は10通り、 $(b, d)$  は任意で36通りある。

- (ii)  $a - c = \pm 2$  のとき

$(a, c)$  は8通り、 $(b, d)$  は  $b - d = 0, \pm 2, \pm 4$  より、 $6 + 8 + 4 = 18$  通りある。

- (iii)  $a - c = \pm 3$  のとき

$(a, c)$  は6通り、 $(b, d)$  は  $b - d = 0, \pm 3$  より、 $6 + 6 = 12$  通りある。

- (iv)  $a - c = \pm 4$  のとき

$(a, c)$  は4通り、 $(b, d)$  は  $b - d = 0, \pm 4$  より、 $6 + 4 = 10$  通りある。

- (v)  $a - c = \pm 5$  のとき

$(a, c)$  は2通り、 $(b, d)$  は  $b - d = 0, \pm 5$  より、 $6 + 2 = 8$  通りある。

- (i)~(v)より、 $l_1$  と  $l_2$  の交点の  $x$  座標、 $y$  座標がともに整数となる確率は、

$$\frac{10 \times 36 + 8 \times 18 + 6 \times 12 + 4 \times 10 + 2 \times 8}{6^4} = \frac{632}{6^4} = \frac{79}{162}$$

### [解説]

確率の標準的な問題です。センターの解答例のように表を作って数え上げました。

2

問題のページへ

(1)  $C_1 : y = e^x \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $C_2 : y = k\sqrt{x-a} \cdots \cdots \textcircled{2}$  に対して,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  を連立すると,

$$e^x = k\sqrt{x-a} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  が  $x \geq a$  において解をもつ条件は,  $x = a$  では不成立なので,  $x > a$  として,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x-a}} = k \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{ここで, } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x-a}} \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{2e^x(x-a) - e^x}{2(x-a)\sqrt{x-a}} = \frac{e^x(2x-2a-1)}{2(x-a)\sqrt{x-a}}$$

これより,  $f(x)$  の増減は右表のようになり,

$$f\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$x$	$a$	$\cdots$	$a + \frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって,  $\textcircled{4}$  が解をもつ条件, すなわち曲線  $\textcircled{1}$

と  $\textcircled{2}$  が共有点をもつ条件は,  $k \geq \sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}}$  である。

(2)  $C_1, C_2$  が共有点  $P(t, e^t)$  で同一の直線  $l$  に接しているとき,  $\textcircled{4}$  はただ 1 つの解  $x = t$  をもつことに対応するので,

$$t = a + \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad k = \sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

すると,  $\textcircled{5}$  より  $a = t - \frac{1}{2}$  となり,  $\textcircled{6}$  から  $k = \sqrt{2}e^t$  である。

(3) 直線  $l$  が原点を通るとき, 点  $P(t, e^t)$  における  $C_1$  の接線の

傾きは  $e^t$  なので,  $\frac{e^t}{t} = e^t$  から  $t = 1$  となる。

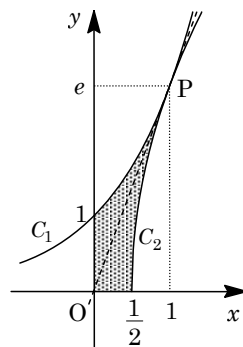
すると, (2) から,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $k = \sqrt{2}e$  となり,

$$C_2 : y = \sqrt{2}e\sqrt{x - \frac{1}{2}} = e\sqrt{2x-1} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

このとき,  $C_1, C_2, x$  軸,  $y$  軸で囲まれる図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を  $V$  とする。

$\textcircled{1}$  より  $x = \log y$ ,  $\textcircled{7}$  より  $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{e^2}\right)$  となり,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^e \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{e^2}\right)^2 dy - \pi \int_1^e (\log y)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^e \left(1 + \frac{2y^2}{e^2} + \frac{y^4}{e^4}\right) dy - \pi \left( [y(\log y)^2]_1^e - \int_1^e 2 \log y dy \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ y + \frac{2y^3}{3e^2} + \frac{y^5}{5e^4} \right]_0^e - \pi (e - 2[y \log y - y]_1^e) \\ &= \frac{\pi}{4} \left( e + \frac{2}{3}e + \frac{1}{5}e \right) - \pi \{ e - 2(e - e + 1) \} = \left( 2 - \frac{8}{15}e \right) \pi \end{aligned}$$



**[解説]**

微積分の総合問題です。(1)は定数分離をして処理しています。また、(3)の求積方法はいろいろありますが、とり立てて工夫もせずに、普通に計算をしました。

3

問題のページへ

楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  と 4 点  $(c, 0)$ ,  $(0, c)$ ,  $(-c, 0)$ ,  $(0, -c)$  を頂点とする正方形の第 1 象限の接点  $P$  の座標を  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とおくと、接線の方程式は、

$$\frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} y = 1, \quad \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y = 1$$

この接線が、点  $(c, 0)$ ,  $(0, c)$  を通るので、

$$\frac{c \cos \theta}{a} = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}, \quad \frac{c \sin \theta}{b} = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } \cos \theta = \frac{a}{c}, \quad \sin \theta = \frac{b}{c} \text{ となり, } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a^2 + b^2 = c^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

このとき、第 1 象限の接点の座標は  $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$  となり、4 つの接点を結んでできる四角形は、対称性から長方形となるので、 $\textcircled{3}$  を利用すると、その面積  $S$  は、

$$S = 4 \cdot \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{4a^2b^2}{c^2} = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

また、楕円  $C$  で囲まれる図形の面積  $T$  は、

$$T = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab$$

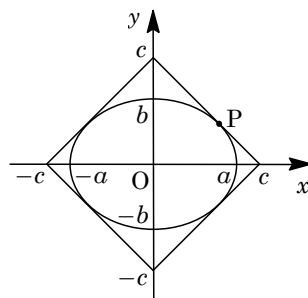
$$\text{このとき, } \frac{2}{\pi} - \frac{S}{T} = \frac{2}{\pi} - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{\pi ab} = \frac{2}{\pi} - \frac{4ab}{\pi(a^2 + b^2)} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係より、

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab, \quad \frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1 \quad (\text{等号は } a = b \text{ のとき成立}) \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{より, } \frac{2}{\pi} - \frac{S}{T} \geq 0, \quad \text{すなわち } \frac{S}{T} \leq \frac{2}{\pi} \text{ が成り立つ。}$$

また、等号成立は、 $\textcircled{3}$  も合わせると、 $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$  のときである。



### [解説]

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると、相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも、 $c$  と  $\theta$  で処理する手もありますが。



4

問題のページへ

- (1) 直線  $l$  の方向ベクトル  $\vec{u} = (1, 1, -3)$ , 直線  $m$  の方向ベクトル  $\vec{v} = (-6-1, 6-2, -1) = (-7, 4, -1)$  とすると,  $t, s$  を実数として,

$$l: (x, y, z) = t(1, 1, -3)$$

$$m: (x, y, z) = (1, 2, 1) + s(-7, 4, -1)$$

条件より, 点  $P$  は直線  $l$  上に, 点  $Q$  は直線  $m$  上にあるので,  $P(t, t, -3t)$ ,  $Q(1-7s, 2+4s, 1-s)$  と表せ,

$$\overrightarrow{PQ} = (1-7s-t, 2+4s-t, 1-s+3t)$$

すると, 直線  $PQ$  が直線  $l, m$  のいずれにも直交することより,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = (1-7s-t) + (2+4s-t) - 3(1-s+3t) = -11t = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = -7(1-7s-t) + 4(2+4s-t) - (1-s+3t) = 66s = 0$$

よって,  $t = s = 0$  となり,  $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 1)$  から  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$  である。

- (2) 点  $A$  は直線  $l$  上, 点  $B$  は直線  $m$  上にあるので,  $a(a \neq 0), b$  を実数として,  $\overrightarrow{PA} = a\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{QB} = b\vec{v}$  とおくと, (1) から,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}) = a\vec{u} \cdot \overrightarrow{PQ} + a\vec{u} \cdot b\vec{v} = ab\vec{u} \cdot \vec{v} = ab(-7+4+3) = 0$$

よって,  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$  となる。

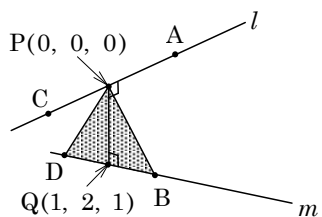
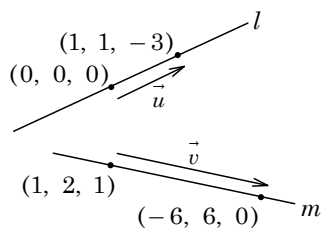
- (3) 直線  $l$  上の 2 点  $A, C$  の中点が  $P$ , 直線  $m$  上の 2 点  $B, D$  の中点が  $Q$  で,  $|\overrightarrow{PA}| = a$ ,  $|\overrightarrow{QB}| = b$  より,  $\triangle BDP$  の面積  $S$  は, (1) より,

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6}b$$

また, (2) より,  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$  かつ  $\angle APD = \frac{\pi}{2}$  となるの

で, 直線  $l$  は  $\triangle BDP$  を含む平面に垂直になり, 四面体  $ABCD$  の体積  $V$  は,

$$V = \frac{1}{3} S \cdot PA + \frac{1}{3} S \cdot PB = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6}b \cdot 2a = \frac{2}{3} \sqrt{6} ab$$



### [解説]

空間図形に関する標準的な問題です。誘導が丁寧で, しかも数値に配慮があるため, 計算量はそれほどでもありません。