1

解答解説のページへ

　$\triangle$ABC の外心を O，重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\angle\mathrm{A}\neq\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ である。このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|^2$ の最大値，最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b を 1 と異なる正の数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2=\dfrac{1}{2}$ を満たす a を求めよ。

(2)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす a の範囲を求めよ。

(3)　$a>1$ かつ $b>1$ とする。$\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，a と b^2 の大小関係を調べよ。

(4)　$a+b\leqq 8$ かつ $\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)\,dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(2)$ を a を用いて表せ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　k は定数とする。$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$\triangle$ABC の外心 O に対して，$\angle A = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，O は辺 BC の中点に一致する。

よって，$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ である。

(2)　$\triangle$ABC が $\angle A \neq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ……(∗)より $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ となり，(1)から $\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ である。

このとき，$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ に注意すると，

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

よって，$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ である。

(3)　$\triangle$ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ となり，(∗)から，

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

すると，$\overrightarrow{OA} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{OB} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OC} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$から，

$$\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}(\cos\theta,\ \sin\theta - \sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{GH}|^2 = \frac{4}{9}\{\cos^2\theta + (\sin\theta - \sqrt{2})^2\} = \frac{4}{9}(3 - 2\sqrt{2}\sin\theta)$$

したがって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$|\overrightarrow{GH}|^2$ は，$\sin\theta = -1$ のとき最大値 $\dfrac{4}{9}(3 + 2\sqrt{2})$，$\sin\theta = 1$ のとき最小値 $\dfrac{4}{9}(3 - 2\sqrt{2})$ をとる。

［解　説］

平面ベクトルと図形についての基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき，$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{2}\log_2 a-\dfrac{1}{\log_2 a}=\dfrac{1}{2}$ となり，

$$(\log_2 a)^2-2=\log_2 a\,,\ (\log_2 a-2)(\log_2 a+1)=0$$

よって，$\log_2 a=2,\ -1$ から，$a=4,\ \dfrac{1}{2}$ である。

(2)　(1)と同様に，$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2\geqq\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{2}\log_2 a-\dfrac{1}{\log_2 a}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，

$$(\log_2 a)^3-2\log_2 a\geqq(\log_2 a)^2,\ (\log_2 a)(\log_2 a-2)(\log_2 a+1)\geqq 0$$

ここで，$\log_2 a\neq 0$ に注意すると，$-1\leqq\log_2 a<0$，$2\leqq\log_2 a$ となり，すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq a<1$，$4\leqq a$ である。

(3)　まず，$a>1$ かつ $b>1$ のとき，$\log_b a>0$ である。

$\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2}\log_b a-\dfrac{1}{\log_b a}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，$\log_b a>0$ から，

$$(\log_b a)^2-2\geqq\log_b a\,,\ (\log_b a-2)(\log_b a+1)\geqq 0$$

$\log_b a+1>0$ なので，$\log_b a\geqq 2$ すなわち $a\geqq b^2$ である。

(4)　a, b は自然数より $a>1$ かつ $b>1$ となり，(3)の結果を利用すると，条件は，

$$a+b\leqq 8\cdots\cdots\cdots①,\ a\geqq b^2\cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$b=2$ のとき　①から $a\leqq 6$，②より $a\geqq 4$ となり，$a=4,\ 5,\ 6$

(ii)　$b\geqq 3$ のとき　②から $a\geqq 9$ となり，①を満たす a は存在しない。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(4,\ 2),\ (5,\ 2),\ (6,\ 2)$

［解　説］

対数方程式，対数不等式についての問題です。(2)では分数不等式が現れるので，場合分けをする代わりに，両辺に分母の 2 乗をかけた後に因数分解という流れで処理をしています。なお，(3)では分母はプラスなので，この処理は必要ありません。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$

(2)　②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}dt$$

$$=\Big[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\Big]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$

$$=2a+1$$

よって，$a=-1$となる。

(3)　(2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と$y=-x^2$ ……④を連立すると，

$xf(x)-k=-x^2$，$xf(x)+x^2=k$

すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと$y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

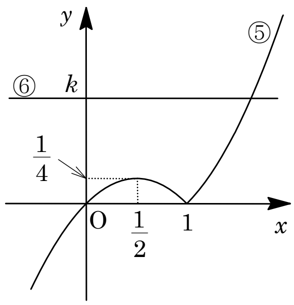
(i)　$x\geqq 1$のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(ii)　$x<1$のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，右図より，

1個$\left(k<0,\ \frac{1}{4}<k\right)$，$2$個$\left(k=0,\ \frac{1}{4}\right)$，$3$個$\left(0<k<\frac{1}{4}\right)$

［解　説］

置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。