1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2)　(1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1，z_2，…とするとき，z_1，z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

2

解答解説のページへ

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0<a<3$ とし，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x)=3-a\sin x$，$g(x)=2\cos^2 x$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)\geqq g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ と a の値を求めよ。また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。

(3) (2)のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4　　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_n>\sqrt{7}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，$b_{n+1}={b_n}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$z^6+27=0$ に対して，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=-27$$

すると，$r^6=|-27|=27$ より $r^2=3$ となり，$r=\sqrt{3}$

また，n を整数として，$6\theta=\arg(-27)=(2n+1)\pi$ より $\theta=\dfrac{2n+1}{6}\pi$ となり，

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

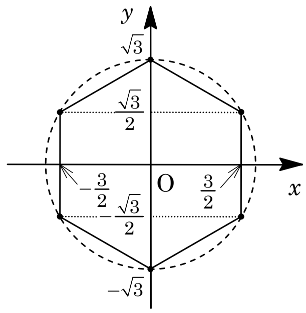
よって，$z=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}i$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\sqrt{3}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



図示すると，右図の正六角形の 6 つの頂点となる。

(2)　$z_1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$z_1z_2=(\sqrt{3})^2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

すると，$z_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=\sqrt{3}i$，$z_1z_2=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}i$ より，$z_2=\dfrac{z_1+z_1z_2}{2}$

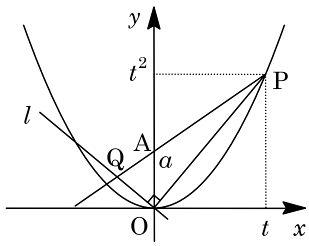
よって，点 z_2 は点 z_1 と点 z_1z_2 を結ぶ線分の中点となるので，3 点 z_1，z_2，z_1z_2 は一直線上にある。

［解 説］

n 乗根と複素数平面を題材にした基本題です。

2

問題のページへ



(1)　$\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\ \ y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2)　点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑥$

すると，$v\neq 0$ から $t=-\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ \ 3u^2+v^2=2v,\ \ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\dfrac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq u<0$ となり，また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

［解　説］

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=3-a\sin x$ $(0<a<3)$，$g(x)=2\cos^2 x$ に対して，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ となる条件は,

$$3-a\sin x\geqq 2\cos^2 x,\ 3-a\sin x\geqq 2-2\sin^2 x$$

ここで，$t=\sin x$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ において，

$$3-at\geqq 2-2t^2,\ 2t^2+1\geqq at\cdots\cdots\cdots①$$

まず，$t=0$ のときは①はつねに成立し，また $0<t\leqq 1$ のときは，①から，

$$2t+\frac{1}{t}\geqq a\cdots\cdots\cdots②$$

そこで，$h(t)=2t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，

$$h'(t)=2-\frac{1}{t^2}=\frac{2t^2-1}{t^2}$$

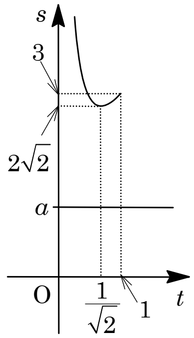
すると，$0<t\leqq 1$ のとき $h(t)$ の増減は右表のようになり，②が成立する条件は $0<a\leqq 2\sqrt{2}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$h'(t)$	×	$-$	0	$+$	
$h(t)$	×	↘	$2\sqrt{2}$	↗	3

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ となる条件は，$0<a\leqq 2\sqrt{2}$ である。

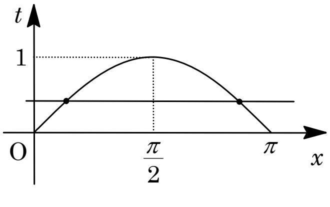
(2)　(1)と同様にして，$f(x)=g(x)$ で，$t=\sin x$ とおくと，①から $2t^2+1=at$ となり，$t=0$ では不成立。

そこで，$0<t\leqq 1$ において，②から $2t+\dfrac{1}{t}=a\cdots\cdots③$ となり，これより $s=h(t)$ と $s=a$ のグラフは右図のようになる。

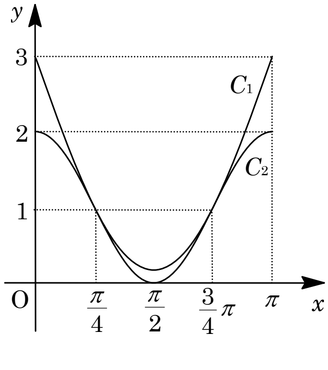


すると，$0<a<2\sqrt{2}$ のとき③は解なし，$a=2\sqrt{2}$ のとき③の解は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のみ，$2\sqrt{2}<a<3$ のとき③の解は $0<t<1$ に 2 個存在する。

さらに，$t=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフは右図のようになり，$0\leqq t<1$ のときは 1 個の t に対して x は 2 個の値が対応し，$t=1$ のときは $x=\dfrac{\pi}{2}$ のみ，それ以外の t に対しては対応する x はない。



よって，$C_1:y=f(x)$ と $C_2:y=g(x)$ がちょうど 2 つの共有点をもつ条件，すなわち $f(x)=g(x)$ が 2 つの実数解をもつ条件は，③の解 t が $0<t<1$ に 1 個だけあることより $a=2\sqrt{2}$ となり，このとき $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ である。すると，$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3}{4}\pi$ より，C_1 と C_2 の概形は右図のようになる。



(3)　(2)より，$f(x)=3-2\sqrt{2}\sin x$，$g(x)=2\cos^2 x=1+\cos 2x$ となる。

すると，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ についての対称性から，

$$S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{3-2\sqrt{2}\sin x-(1+\cos 2x)\}dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2-2\sqrt{2}\sin x-\cos 2x)dx$$

$$=2\Big[\,2x+2\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)+4\sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)-(-1)$$

$$=\pi-3$$

［解　説］

微積分の総合問題です。三角関数の置き換えが絡んでいますので，解の個数に注意が必要です。なお，(1)(2)については，定数分離の手法を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(a_n+\dfrac{7}{a_n}\Big)$で定義される数列$\{a_n\}$に対して，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$で

$a_n>\sqrt{7}$であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=3>\sqrt{7}$より成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>\sqrt{7}$と仮定すると，

$$a_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\Big(a_k+\frac{7}{a_k}\Big)-\sqrt{7}=\frac{{a_k}^2+7-2\sqrt{7}a_k}{2a_k}=\frac{(a_k-\sqrt{7})^2}{2a_k}>0$$

よって，$a_{k+1}>\sqrt{7}$となり，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$で，$a_n>\sqrt{7}$である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$……①で，(1)から複号同順で，$a_{n+1}\pm\sqrt{7}=\dfrac{(a_n\pm\sqrt{7})^2}{2a_n}$なので，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{7}}{a_{n+1}+\sqrt{7}}=\frac{(a_n-\sqrt{7})^2}{(a_n+\sqrt{7})^2}=\Big(\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\Big)^2={b_n}^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②より，$b_n>0$なので$\log b_{n+1}=2\log b_n$となり，$\log b_n=2^{n-1}\log b_1$

ここで，①より$b_1=\dfrac{a_1-\sqrt{7}}{a_1+\sqrt{7}}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{(3-\sqrt{7})^2}{2}=8-3\sqrt{7}$となり，

$$\log b_n=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$0<8-3\sqrt{7}<1$なので$\log(8-3\sqrt{7})<0$となり，$n\to\infty$のとき

$$\log b_n\to-\infty,\quad b_n\to+0$$

①より，$b_n(a_n+\sqrt{7})=a_n-\sqrt{7}$となり，$a_n=\dfrac{-\sqrt{7}(b_n+1)}{b_n-1}$から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{-\sqrt{7}}{-1}=\sqrt{7}$$

また，③より$\log\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})$なので，

$$\begin{aligned}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})&=2^{-n}\{\log(a_n+\sqrt{7})+2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})\}\\&=2^{-n}\log(a_n+\sqrt{7})+\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{7}$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})$となる。

［解　説］

有名な漸化式を題材にした極限の問題です。誘導が丁寧なので，方針に迷うことはありません。