

1

解答解説のページへ

座標平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ ($0 < b < 1$) における接線を l とし、 l と x 軸の交点を Q とする。点 $R(4, 0)$ と l の距離が 2 であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間において、中心が $A(0, 0, a)$ ($a > 0$) で半径が r の球面

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2$$

は、点 $B(\sqrt{5}, \sqrt{5}, a)$ と点 $(1, 0, -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

- (1) r と a の値を求めよ。
- (2) 点 $P(\cos t, \sin t, -1)$ について、ベクトル \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AP} を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ を求めよ。
- (3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また、 t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、 S の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{pmatrix}$ ($r > 0$) と座標平面上の点 $P_0(-1, 2)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,
 \dots , $P_n(x_n, y_n)$, \dots は、式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

- (1) A^{2k} , A^{2k+1} ($k=1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (2) x_n , y_n ($n=1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (3) 線分 $P_{n-1}P_n$ の長さを d_n ($n=1, 2, 3, \dots$) とする。数列 $\{d_n\}$ の初項 d_1 と一般項 d_n を求めよ。また、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ が収束し、その和が 3 となるような r の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a(a > 0)$ を定数とし、 $f(x) = 2a \log x - (\log x)^2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフは、 x 軸と点 $P_1(x_1, 0)$ 、 $P_2(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) で交わっている。次の問いに答えよ。

- (1) x_1 、 x_2 の値を求めよ。また、 $y = f(x)$ の最大値と、そのときの x の値を求めよ。
- (2) 点 P_1 、 P_2 における $y = f(x)$ の接線をそれぞれ l_1 、 l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} X(a)$ を求めよ。
- (3) $a = 1$ とするとき、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 円
- $x^2 + y^2 = 1$
- 上の点
- $P(a, b)$
- における接線
- l
- は、

$$ax + by = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ただし、 $a^2 + b^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$ である。さて、 $R(4, 0)$ と l の距離が 2 から、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2, \quad |4a-1| = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

 $\textcircled{2}$ より、 $|4a-1| = 2$ となり、 $4a-1 = \pm 2$, $a = \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}$

 すると、 $0 < b < 1$ から、 $a = \frac{3}{4}$ のとき $b = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$ のとき $b = \frac{\sqrt{15}}{4}$

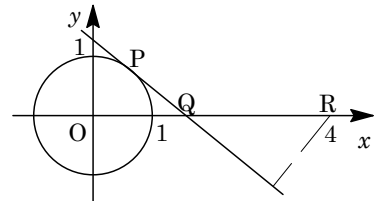
 よって、点 P の座標は、 $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$ または $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ である。

- (2)
- $P(a, b)$
- のとき、
- $\textcircled{1}$
- より
- $Q(\frac{1}{a}, 0)$
- となり、
- $\textcircled{2}$
- から、

$$PQ = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} + 1 - a^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$$

$$(i) \quad a = \frac{3}{4} \text{ のとき} \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot 2 = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$(ii) \quad a = -\frac{1}{4} \text{ のとき} \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot 2 = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$$



[解説]

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

2

問題のページへ

(1) 球面 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = r^2$ が、2 点 $(\sqrt{5}, \sqrt{5}, a)$, $(1, 0, -1)$ を通ることより、

$$5+5=r^2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 1+(-1-a)^2=r^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 $r = \sqrt{10}$ となり、②に代入すると、 $(-1-a)^2 = 9$

$a > 0$ より、 $a = 2$

(2) (1)より、 $A(0, 0, 2)$, $B(\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2)$, $P(\cos t, \sin t, -1)$ に対し、

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0), \quad \overrightarrow{AP} = (\cos t, \sin t, -3), \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \sqrt{5} \cos t + \sqrt{5} \sin t$$

(3) $\triangle ABP$ の面積 S は、(2)より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AP}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(5+5)(\cos^2 t + \sin^2 t + 9) - 5(\cos t + \sin t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{100 - 5(1 + 2 \sin t \cos t)} = \frac{1}{2} \sqrt{95 - 5 \sin 2t} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ から、 $\sin 2t = 1$ ($t = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$) のとき、 S は最小値 $\frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$ をとる。

[解説]

単に空間ベクトルの計算問題です。球面の方程式は形式的なものにすぎません。

3

問題のページへ

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ -r & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{より, } A^2 = r^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{これより, 帰納的に, } A^{2k} = r^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{2k+1} = r^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (i) n が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } x_n = -r^n, y_n = 2r^n$$

(ii) n が奇数のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{よって, } x_n = -2r^n, y_n = r^n$$

なお, $P_1(-2r, r)$ より, この式は $n=1$ のときも成立する。

$$(3) \text{まず, } d_1 = P_0 P_1 = \sqrt{(-2r+1)^2 + (r-2)^2} = \sqrt{5r^2 - 8r + 5}$$

さて, n が偶数のとき, $P_n(-r^n, 2r^n)$, $P_{n-1}(-2r^{n-1}, r^{n-1})$ より,

$$\begin{aligned} d_n &= P_{n-1} P_n = \sqrt{(-r^n + 2r^{n-1})^2 + (2r^n - r^{n-1})^2} \\ &= r^{n-1} \sqrt{(-r+2)^2 + (2r-1)^2} = r^{n-1} \sqrt{5r^2 - 8r + 5} \end{aligned}$$

また, n が奇数のとき, $P_n(-2r^n, r^n)$, $P_{n-1}(-r^{n-1}, 2r^{n-1})$ より,

$$\begin{aligned} d_n &= P_{n-1} P_n = \sqrt{(-2r^n + r^{n-1})^2 + (r^n - 2r^{n-1})^2} \\ &= r^{n-1} \sqrt{(-2r+1)^2 + (r-2)^2} = r^{n-1} \sqrt{5r^2 - 8r + 5} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } n \text{ の偶奇にかかわらず, } d_n = r^{n-1} \sqrt{5r^2 - 8r + 5}$$

ここで, 初項 d_1 , 公比 r の無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ が収束し, 和が 3 となる条件は,

$$0 < r < 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{\sqrt{5r^2 - 8r + 5}}{1-r} = 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \sqrt{5r^2 - 8r + 5} = 3(1-r), \quad 5r^2 - 8r + 5 = 9(1-r)^2 \text{ となり,}$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0, \quad (r-2)(2r-1) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{から, } r = \frac{1}{2} \text{ である.}$$

[解 説]

A の表す 1 次変換は, 直線 $y = -x$ に関して折り返し, r 倍の相似拡大を行う相似変換です。このことを, もう少し前面に出す解答例も可能です。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = 2a \log x - (\log x)^2$ に対し、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点は、

$$(2a - \log x)(\log x) = 0, \log x = 0, 2a$$

よって、 $x = 1, e^{2a}$ となり、交点の x 座標 x_1, x_2 は、 $x_1 = 1, x_2 = e^{2a}$

$$\text{また、} f'(x) = \frac{2a}{x} - \frac{2 \log x}{x} = \frac{2(a - \log x)}{x}$$

これより、 $f(x)$ の増減は右表のようになり、
 $x = e^a$ のとき $f(x)$ は最大となる。その値は、

$$f(e^a) = 2a \cdot a - a^2 = a^2$$

x	0	...	e^a	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗		↘

(2) $P_1(1, 0)$ における接線 l_1 は、 $f'(1) = 2a$ より、 $y = 2a(x - 1) \dots \dots \dots \textcircled{1}$

また、 $P_2(e^{2a}, 0)$ における接線 l_2 は、 $f'(e^{2a}) = -2ae^{-2a}$ より、

$$y = -2ae^{-2a}(x - e^{2a}) = -2ae^{-2a}x + 2a \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ を連立すると、 $2a(x - 1) = -2ae^{-2a}x + 2a$ より、 $x - 1 = -e^{-2a}x + 1$

$$(1 + e^{-2a})x = 2, x = \frac{2}{1 + e^{-2a}}$$

よって、 $X(a) = \frac{2}{1 + e^{-2a}}$ から、 $\lim_{a \rightarrow \infty} X(a) = 2$

(3) $a = 1$ のとき、 $f(x) = 2 \log x - (\log x)^2$, $P_1(1, 0)$,

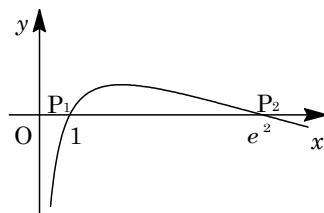
$P_2(e^2, 0)$ から、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれ

た図形の面積 S は、

$$S = \int_1^{e^2} \{2 \log x - (\log x)^2\} dx$$

ここで、 $t = \log x$ とおくと、 $x = e^t$ より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (2t - t^2) e^t dt = \left[(2t - t^2) e^t \right]_0^2 - \int_0^2 2(1 - t) e^t dt \\ &= -2 \left[(1 - t) e^t \right]_0^2 + 2 \int_0^2 -e^t dt = -2(-e^2 - 1) - 2 \left[e^t \right]_0^2 \\ &= 2e^2 + 2 - 2(e^2 - 1) = 4 \end{aligned}$$



[解説]

微積分総合の基本問題です。捻りはまったくありません。