1

解答解説のページへ

t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える。

(1)　点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2)　t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。

2

解答解説のページへ

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

(2)　この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=\alpha,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2)　関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x)=3x,\ \ f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

三角形 OAB が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1)　辺 OB の長さを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x\log(x+2)+1\ (x>-2)$ を考える。 $y=f(x)$ で表される曲線を C とする。C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし，$\log t$ は t の自然対数である。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するとき，

$$\cos 2t=\sin t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \cos t=\sin 2t\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-2\sin^2 t=\sin t$ から $2\sin^2 t+\sin t-1=0$ となり，

$$(2\sin t-1)(\sin t+1)=0$$

すると，$\sin t=\dfrac{1}{2}$ または $\sin t=-1$ より，n を整数として，

$$t=2n\pi+\frac{\pi}{6},\ t=2n\pi+\frac{5}{6}\pi,\ t=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$$

②より，$\cos t=2\sin t\cos t$，$\cos t(2\sin t-1)=0$

$t=2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$t=2n\pi+\dfrac{5}{6}\pi$ のときは $2\sin t-1=0$ で②をみたし，$t=2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi$ のときは $\cos t=0$ で②をみたしている。これより，点 P と点 Q が一致する t は，

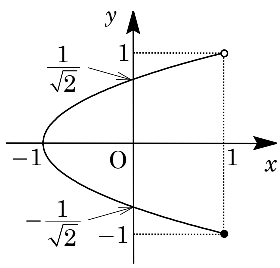
$$t=2n\pi+\frac{\pi}{6},\ t=2n\pi+\frac{5}{6}\pi,\ t=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x=\cos 2t=2\cos^2 t-1$，$y=\cos t$ から，$x=2y^2-1$

ただし，$0<t<2\pi$ から $-1\leqq y<1$ である。

よって，点 P の軌跡は，放物線 $x=2y^2-1\ (-1\leqq y<1)$ であり，図示すると右図の曲線となる。ただし，端点 $(1,\ 1)$ は含まず，端点 $(1,\ -1)$ は含む。

また，x 軸との交点は $(-1,\ 0)$，y 軸との交点は $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と $\left(0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。



［解 説］

パラメータ表示された点の軌跡についての基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　正八面体のさいころを投げ，「1」，「2」，「3」，「0」の書かれた面が出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{5}{8}$である。このとき，持ち点 0 から始め，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を行う。

さて，試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下であるのは，

(i)　持ち点が 0 のとき

「0」が n 回の場合より，その確率は$\left(\dfrac{5}{8}\right)^n=\dfrac{5^n}{8^n}$である。

(ii)　持ち点が 1 のとき

「1」が 1 回，「0」が$n-1$回の場合より，その確率は${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}=\dfrac{n\cdot5^{n-1}}{8^n}$である。

(iii) 持ち点が 2 のとき

「1」が 2 回，「0」が$n-2$回の場合，または「2」が 1 回，「0」が$n-1$回の場合より，その確率は${}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}=\dfrac{n(n-1)\cdot5^{n-2}}{2\cdot8^n}+\dfrac{n\cdot5^{n-1}}{8^n}$である。

(i)〜(iii)より，試行を n 回行い，持ち点が 2 以下である確率 P は，

$$P=\frac{5^n}{8^n}+\frac{n\cdot5^{n-1}}{8^n}+\frac{n(n-1)\cdot5^{n-2}}{2\cdot8^n}+\frac{n\cdot5^{n-1}}{8^n}=\frac{5^{n-2}}{2\cdot8^n}(50+20n+n^2-n)$$
$$=\frac{(n^2+19n+50)\cdot5^{n-2}}{2\cdot8^n}$$

(2)　試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 以上であるのは，

(a)　持ち点が 12 のとき

「3」が 4 回の場合より，その確率は$\left(\dfrac{1}{8}\right)^4=\dfrac{1}{8^4}$である。

(b)　持ち点が 11 のとき

「2」が 1 回，「3」が 3 回の場合より，その確率は${}_4\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{8}\right)^3=\dfrac{4}{8^4}$である。

(c)　持ち点が 10 のとき

「2」が 2 回，「3」が 2 回の場合，または「1」が 1 回，「3」が 3 回の場合より，その確率は${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{8}\right)^3=\dfrac{10}{8^4}$である。

(a)〜(c)より，試行を 4 回行って持ち点が 10 以上である確率は，

$$\frac{1}{8^4}+\frac{4}{8^4}+\frac{10}{8^4}=\frac{15}{8^4}$$

さらに，試行を 2 回行って持ち点が 17 以上であるのは，追加の 2 回について，

(a)　4 回で持ち点が 12，6 回で持ち点が 17 以上のとき

「3」が 2 回の場合，または「2」が 1 回，「3」が 1 回の場合より，その確率は，

$$\frac{1}{8^4}\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\right\}=\frac{1}{8^4}\cdot\frac{3}{8^2}=\frac{3}{8^6}$$

(b)　4 回で持ち点が 11，6 回で持ち点が 17 以上のとき

「3」が 2 回の場合より，その確率は$\frac{4}{8^4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{4}{8^6}$である。

(c)　4 回で持ち点が 10，6 回で持ち点が 17 以上のとき　この場合はない。

(a)～(c)より，4 回で持ち点が 10 以上，6 回で持ち点が 17 以上である確率は，

$$\frac{3}{8^6}+\frac{4}{8^6}=\frac{7}{8^6}$$

したがって，求める条件付き確率は，$\frac{7}{8^6}\div\frac{15}{8^4}=\frac{7}{15\cdot 8^2}=\frac{7}{960}$である。

［解　説］

確率の基本題です。ていねいな場合分けがすべてです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ に対し，$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ と変形すると，

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n=2+(\alpha-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………①

(2)　$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$ に対し，$c_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ とおくと，

$$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+c_nx$$

すると，$n\geqq 2$ において，$f_n(x)=(n+1)x^n+c_{n-1}x$ となり，

$$c_n=\int_0^1\{(n+1)t^n+c_{n-1}t\}\,dt=\left[\,t^{n+1}+\frac{c_{n-1}}{2}t^2\,\right]_0^1=1+\frac{1}{2}c_{n-1}$$

ここで，$f_1(x)=3x$ より $c_1=\displaystyle\int_0^1 3t\,dt=\left[\,\frac{3}{2}t^2\,\right]_0^1=\frac{3}{2}$ となり，①から，

$$c_n=2+\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x\quad(n\geqq 2)$ ………②

なお，②に $n=1$ をあてはめると，$f_1(x)=2x+\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right\}x=3x$ となり，

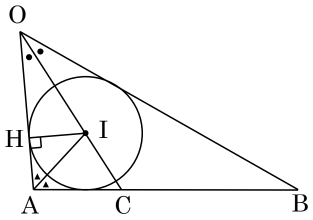
$$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x$$

［解　説］

(2)は置換え型の積分方程式です。置換えを実行すると(1)の漸化式が現れ，その結果を利用できます。

4

問題のページへ



(1)　△OAB に余弦定理を適用すると，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

条件から $25=9+OB^2-2\cdot 10$ となり，$OB^2=36$ より，

$$OB=6$$

(2)　直線 OI と辺 AB との交点を C とおくと，OI は∠AOB の二等分線なので，AC : CB = OA : OB より，

$$AC:CB=3:6,\ AC:CB=1:2\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$AC=\frac{1}{3}AB=\frac{5}{3}$ となる。

また, AI は∠OAC の二等分線なので，OI : IC = AO : AC より，

$$OI:IC=3:\frac{5}{3},\ OI:IC=9:5\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\overrightarrow{OI}=\frac{9}{9+5}\overrightarrow{OC}=\frac{9}{14}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{14}\overrightarrow{OB}$ となる。

(3)　k を実数として，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}$ とおくと，

$$\overrightarrow{HI}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{14}\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{7}-k\right)\overrightarrow{OA}+\frac{3}{14}\overrightarrow{OB}$$

ここで，$\overrightarrow{HI}\perp\overrightarrow{OA}$ から $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ となり，$\left(\frac{3}{7}-k\right)|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{14}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$$9\left(\frac{3}{7}-k\right)+\frac{3}{14}\cdot 10=0,\ 6-9k=0$$

これより $k=\frac{2}{3}$ となり，$\overrightarrow{HI}=\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{3}{14}\overrightarrow{OB}=-\frac{5}{21}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{14}\overrightarrow{OB}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの三角形の内心への応用問題です。典型的な頻出題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\log(x+2)+1\ (x>-2)$ に対して，$f'(x)=\log(x+2)+\dfrac{x}{x+2}$

ここで，$C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は,

$$y-\{t\log(t+2)+1\}=\left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}(x-t)$$

原点を通ることより，$t\log(t+2)+1=\left\{\log(t+2)+\dfrac{t}{t+2}\right\}t$ となり，

$$1=\frac{t^2}{t+2},\ t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$$

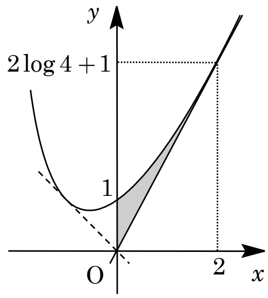
$t=-1$ のとき $f'(-1)=-1<0$，$t=2$ のとき $f'(2)=\log 4+\dfrac{1}{2}=2\log 2+\dfrac{1}{2}>0$

したがって, 傾きが正で原点を通る接線 l の方程式は,

$$y=\left(2\log 2+\frac{1}{2}\right)x$$

(2)　$f''(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{(x+2)-x}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{(x+2)^2}>0$ から，曲線 C は下に凸である。

(3)　C と l および y 軸で囲まれた部分の面積 S は,



$$S=\int_0^2\{x\log(x+2)+1\}dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2\log 4+1)$$
$$=\int_0^2 x\log(x+2)dx+2-(4\log 2+1)$$
$$=\int_0^2 x\log(x+2)dx+1-4\log 2$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^2 x\log(x+2)dx$ とおくと,

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\log(x+2)\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{x+2}dx=2\log 4-\frac{1}{2}\int_0^2\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx$$
$$=4\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2x+4\log(x+2)\right]_0^2=4\log 2-\frac{1}{2}\left(2-4+4\log\frac{4}{2}\right)$$
$$=2\log 2+1$$

したがって，$S=2\log 2+1+1-4\log 2=2-2\log 2$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。なお, (3)の積分計算は，とりたてて工夫もせずに行ったものの, 難儀な点はありませんでした。