1

解答解説のページへ

$P(x)$を x についての整式とし，$P(x)P(-x)=P(x^2)$は x についての恒等式であるとする。

(1)　$P(0)=0$ または$P(0)=1$であることを示せ。

(2)　$P(x)$が$x-1$で割り切れないならば，$P(x)-1$は$x+1$で割り切れることを示せ。

(3)　次数が 2 である$P(x)$をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 OAB は辺の長さが $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=7$ であるとする。また，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と直線 AB との交点を P とし，頂点 B における外角の二等分線と直線 OP との交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，…，a_n とし，$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ とおく。また K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1)　$K_2=5$ となる確率を求めよ。

(2)　$K_3=5$ となる確率を求めよ。

(3)　q_n を求めよ。また $K_n=q_n$ となるための a_1，a_2，…，a_n に関する必要十分条件を求めよ。

4

解答解説のページへ

q を実数とする。座標平面上に円 $C: x^2+y^2=1$ と放物線 $P: y=x^2+q$ がある。

(1)　C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき，q の値およびその接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた q の値を q_1，接点の y 座標を y_1 とするとき，連立不等式

$$x^2+y^2 \geqq 1,\quad y \geqq x^2+q_1,\quad y \leqq y_1$$

の表す領域の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　整式$P(x)$が，$P(x)P(-x)=P(x^2)$ ……①を満たすとき，$x=0$を代入して，

$$P(0)P(0)=P(0),\ P(0)\{P(0)-1\}=0$$

よって，$P(0)=0$または$P(0)=1$である。

(2)　①に$x=1$を代入すると，$P(1)P(-1)=P(1)$となり，

$$P(1)\{P(-1)-1\}=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$P(x)$が$x-1$で割り切れないならば$P(1)\neq 0$なので，②より，

$$P(-1)-1=0$$

よって，$P(x)-1$は$x+1$で割り切れる。

(3)　$P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$とおくと，①より，

$$(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)=ax^4+bx^2+c$$

$$(ax^2+c)^2-b^2x^2=ax^4+bx^2+c \cdots\cdots\cdots ③$$

③の両辺の係数を比較すると，

$$a^2=a \cdots\cdots\cdots ④,\ 2ac-b^2=b \cdots\cdots\cdots ⑤,\ c^2=c \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より$a\neq 0$から$a=1$となり，⑥より$c=0,\ 1$なので，⑤に代入すると，

・$c=0$のとき　$b^2+b=0$から$b(b+1)=0$となり，$b=0,\ -1$

・$c=1$のとき　$b^2+b=2$から$(b-1)(b+2)=0$となり，$b=1,\ -2$

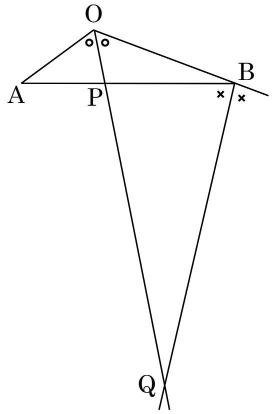
以上より，$P(x)=x^2$，$P(x)=x^2-x$，$P(x)=x^2+x+1$，$P(x)=x^2-2x+1$

［解　説］

整式を題材とした恒等式の問題です。(2)は因数定理に気づくことがポイントです。なお，①が複雑な式でないので，(3)は(1)と(2)の結果を無視して解きました。

2

問題のページへ



(1)　$OA=3$，$OB=5$，$AB=7$ である $\triangle OAB$ に対して，$\angle AOB$ の二等分線と直線 AB との交点 P は，線分 AB を $OA:OB=3:5$ に内分するので，$AP:PB=3:5$ となり，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$$

さて，余弦定理より $7^2=3^2+5^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ となり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2}=-\frac{15}{2}$$

すると，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\frac{1}{8}\left|5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|$ から，

$$\left|5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|^2=25\cdot3^2+30\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)+9\cdot5^2=225$$

よって，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\frac{1}{8}\sqrt{225}=\frac{15}{8}$ である。

(2)　(1)より，$BP=\frac{5}{8}BA=\frac{35}{8}$ となる。

ここで，頂点 B における外角の二等分線と直線 OP との交点 Q は，線分 OP を $BO:BP=5:\frac{35}{8}=8:7$ に外分するので，$OQ:QP=8:7$ となり，

$$\overrightarrow{OQ}=8\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB},\ \left|\overrightarrow{OQ}\right|=8\left|\overrightarrow{OP}\right|=15$$

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。内容は，三角形の角の二等分線と比に関する知識だけです。

3

問題のページへ

(1)　$K_2=|1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-6|$ に対し，$1\leqq a_1\leqq 6$，$1\leqq a_2\leqq 6$ より，

$$K_2=-(1-a_1)-(a_2-6)+|a_1-a_2|=5+(a_1-a_2)+|a_1-a_2|\cdots\cdots\cdots①$$

(a)　$a_1-a_2>0\ (a_1>a_2)$ のとき　①より，$K_2=5+2(a_1-a_2)>5$

(b)　$a_1-a_2\leqq 0\ (a_1\leqq a_2)$ のとき　①より，$K_2=5+(a_1-a_2)-(a_1-a_2)=5$

(a)(b)より，$K_2=5$ となるのは，$a_1\leqq a_2$ のときで，

・$a_1=a_2$ のとき　$(a_1,\ a_2)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_1=6$ 通り

・$a_1<a_2$ のとき　$(a_1,\ a_2)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通り

よって，$K_2=5$ となる確率は，$\dfrac{6+15}{6^2}=\dfrac{7}{12}$ である。

(2)　$K_3=|1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6|$ に対し，$1\leqq a_1\leqq 6$，$1\leqq a_3\leqq 6$ より，

$$\begin{aligned}K_3&=-(1-a_1)-(a_3-6)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|\\&=5+(a_1-a_3)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|\end{aligned}$$

三角不等式より，$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|\geqq|(a_1-a_2)+(a_2-a_3)|=|a_1-a_3|$ となり，

$$K_3\geqq 5+(a_1-a_3)+|a_1-a_3|\cdots\cdots\cdots②$$

三角不等式において等号が成立するのは，a_1-a_2 と a_2-a_3 の符号が等しい，すなわち $a_1\geqq a_2\geqq a_3$ または $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のときである。

(a)　$a_1-a_3>0\ (a_1>a_3)$ のとき　②より，$K_3\geqq 5+2(a_1-a_3)>5$

(b)　$a_1-a_3\leqq 0\ (a_1\leqq a_3)$ のとき　②より，$K_3\geqq 5+(a_1-a_3)-(a_1-a_3)=5$

(a)(b)より，$K_3=5$ となるのは，

$$a_1\leqq a_3\ \text{かつ}\ (a_1\geqq a_2\geqq a_3\ \text{または}\ a_1\leqq a_2\leqq a_3)$$

これより，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のときである。

・$a_1=a_2=a_3$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_1=6$ 通り

・$a_1=a_2<a_3$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通り

・$a_1<a_2=a_3$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通り

・$a_1<a_2<a_3$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り

よって，$K_3=5$ となる確率は，$\dfrac{6+15+15+20}{6^3}=\dfrac{7}{27}$ である。

(3)　$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ に対し，(2)と同様にすると，

$$\begin{aligned}K_n&=-(1-a_1)-(a_n-6)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\\&=5+(a_1-a_n)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

さて，$n\geqq 2$ として，実数 x_1，x_2，…，x_n に対し，次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法により示す。

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_n|\cdots\cdots\cdots(*)$$

ただし，等号は x_1，x_2，…，x_n の符号が同じときに成立する。

(i)　$n=2$ のとき

三角不等式より，$|x_1|+|x_2|\geqq|x_1+x_2|$（等号成立は x_1，x_2 の符号が同じとき）

(ii)　$n=k$ のとき

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k|$（等号成立は x_1，x_2，…，x_k の符号が同じとき）が成り立つと仮定すると，

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|$$

三角不等式より，$|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|$ となり，

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|$$

等号成立は，x_1，x_2，…，x_k の符号が同じで，しかも $x_1+x_2+\cdots+x_k$ と x_{k+1} の符号が同じとき，すなわち x_1，x_2，…，x_k，x_{k+1} の符号が同じときである。

(i)(ii)より，$n\geqq2$ で，不等式(＊)が成り立つ。

ただし，等号は x_1，x_2，…，x_n の符号が同じときに成立する。

そこで，$x_1=a_1-a_2$，$x_2=a_2-a_3$，…，$x_{n-1}=a_{n-1}-a_n$ とおくと，

$$|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\geqq|(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)|=|a_1-a_n|\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$K_n\geqq5+(a_1-a_n)+|a_1-a_n|\cdots\cdots\cdots⑤$

④において等号が成立するのは，a_1-a_2，…，$a_{n-1}-a_n$ の符号が等しい，すなわち $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_{n-1}\geqq a_n$ または $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n$ のときである。

(a)　$a_1-a_n>0\ (a_1>a_n)$ のとき　⑤より，$K_n\geqq5+2(a_1-a_n)>5$

(b)　$a_1-a_n\leqq0\ (a_1\leqq a_n)$ のとき　⑤より，$K_n\geqq5+(a_1-a_n)-(a_1-a_n)=5$

(a)(b)より，$K_n\geqq5$ となり，等号が成り立つのは，

$$a_1\leqq a_n\ \text{かつ}\ (a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_{n-1}\geqq a_n\ \text{または}\ a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n)$$

これより，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n$ のときである。

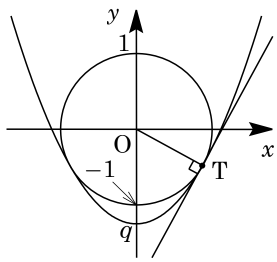
以上より，K_n のとりうる値の最小値 q_n は $q_n=5$ であり，$K_n=q_n$ となるための必要十分条件は，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}\leqq a_n$ である。

［解 説］

確率と三角不等式が融合した難度の高い問題です。(1)と(2)で場合の数を数える箇所は，場合分けにより計算しましたが，重複組合せを用いるという手もあります。また，(3)も(1)(2)と同様な方法を採用しましたが，一般化した三角不等式(＊)については，簡単に証明しておきました。記述不要だったかもしれませんが。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　円 $C: x^2+y^2=1$ ……①と放物線 $P: y=x^2+q$ ……②に同じ点 T で接する傾き正の直線が存在する。

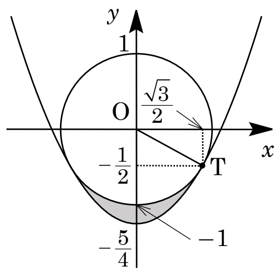
このとき，$\mathrm{T}(x_1,\ y_1)$ とおくと，②から $y'=2x$ なので P に接する直線の傾きは $2x_1>0$ となり，また直線 OT の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ から，$2x_1\cdot\dfrac{y_1}{x_1}=-1$ である。

よって，$y_1=-\dfrac{1}{2}$ となり，①から ${x_1}^2+{y_1}^2=1$ かつ $x_1>0$ なので，

$$x_1=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，接点 T の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

また，②から $y_1={x_1}^2+q$ なので，$q=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{5}{4}$ となる。



(2)　連立不等式 $x^2+y^2\geqq 1$，$y\geqq x^2-\dfrac{5}{4}$，$y\leqq -\dfrac{1}{2}$ で表される領域は右図の網点部となる。ただし境界は領域に含む。

そして，この領域の面積を S とおくと，線分 OT と y 軸のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ から，

$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left(x^2-\frac{5}{4}\right)dx-2\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

［解　説］

円と放物線が接する条件という頻出パターンの基本題です。