1

解答解説のページへ

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a,\ b$ に対し，関数 $f(x) = \left| x(x-1) \right| + \left| (x-a)(x-b) \right|$ を考える。x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする。

(1)　$x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ。

(2)　$m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ。

(3)　a, b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 P_1, P_2, …, P_n, …および Q_1, Q_2, …, Q_n, …が, すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n},\ \ \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また, P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。

(1)　x_{n+2} を a, x_n, x_{n+1} で表せ。

(2)　$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2}$, $y_2 - y_1 = 1$ のとき, 数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　連立不等式$x \geqq 2$，$2^x \leqq x^y \leqq x^2$の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし，自然対数の底eが$2 < e < 3$をみたすことを用いてよい。

(2)　$a > 0$に対して，連立不等式$2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$の表す xy 平面上の領域の面積を$S(a)$とする。$S(a)$を最小にするaの値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

(1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。

(2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは，D，H，K の 3 文字（玉は 4 個）のことである。

(3) 隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし，i を虚数単位とする。

$$z\overline{z}=4 \cdots\cdots\cdots ①,\ |z|=|z-\sqrt{3}+i| \cdots\cdots\cdots ②$$

(1)　①，②それぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2)　①，②の共通解となる複素数をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|\ (0\leqq a\leqq b\leqq 1)$ が最小値 m をもつとき，

$x<0$ および $x>1$ では,

$$f(x)=x(x-1)+(x-a)(x-b)=2x^2-(a+b+1)x+ab$$
$$=2\left(x-\frac{a+b+1}{4}\right)^2-\frac{(a+b+1)^2}{8}+ab$$

ここで，$\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{a+b+1}{4}\leqq\dfrac{3}{4}$ なので，$x<0$ では $f(x)$ は単調に減少することより $f(x)>f(0)\geqq m$，$x>1$ では単調に増加することより $f(x)>f(1)\geqq m$ である。

すなわち，$x<0$ および $x>1$ では $f(x)>m$ となる。

(2)　(1)から，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において最小値 m をとり，

(i)　$0\leqq x\leqq a$ のとき　$f(x)=-x(x-1)+(x-a)(x-b)=(1-a-b)x+ab$

(ii)　$a\leqq x\leqq b$ のとき

$$f(x)=-x(x-1)-(x-a)(x-b)=-2x^2+(a+b+1)x-ab$$

(iii)　$b\leqq x\leqq 1$ のとき　$f(x)=-x(x-1)+(x-a)(x-b)=(1-a-b)x+ab$

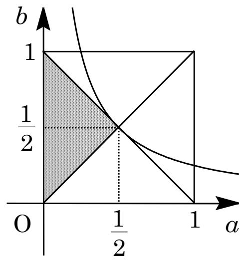
さて，$f(x)$ は連続関数であり，(ii)から $a\leqq x\leqq b$ ではグラフが上に凸の放物線，(i)(iii)から $0\leqq x\leqq a$，$b\leqq x\leqq 1$ ではグラフが同じ直線上にあるので，

$1-a-b\geqq 0\ (a+b\leqq 1)$ のとき　$m=f(0)=ab$

$1-a-b\leqq 0\ (a+b\geqq 1)$ のとき　$m=f(1)=(1-a)(1-b)$

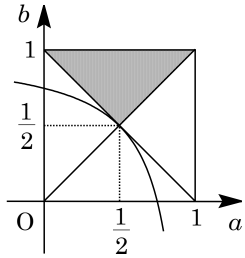
(3)　a, b が $0\leqq a\leqq b\leqq 1$ をみたして動くとき,

(Ⅰ)　$a+b\leqq 1$ のとき　$m=ab$



点 $(a,\ b)$ は右図の網点部(境界を含む)を動く。$a\neq 0$ のとき，双曲線 $b=\dfrac{m}{a}$ が網点部と共有点をもつ $m>0$ の範囲を調べると，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で最大値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ をとる。

(Ⅱ)　$a+b\geqq 1$ のとき　$m=(1-a)(1-b)$



点 $(a,\ b)$ は右図の網点部(境界を含む)を動く。$a\neq 1$ のとき，双曲線 $b=\dfrac{m}{a-1}+1$ が網点部と共有点をもつ $m>0$ の範囲を調べると，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で最大値 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ をとる。

(Ⅰ)(Ⅱ)より，m の最大値は $\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

絶対値つきの関数を題材にした最大・最小問題です。「$f(x)$ は最小値 m をもつ」という表現の意味を捉える点が難しいところです。誘導に従えばよいだけなのですが。

2　　問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(x_n,\ y_n)$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+(1-a)(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})=a\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}=a\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=a(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})+(1-a)(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})$$
$$=a(\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\left(0,\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\right)$から，①の両辺の x 成分を比べると，

$$x_{n+2}-x_{n+1}=a(x_{n+1}-x_n)\cdots\cdots\cdots②$$

よって，$x_{n+2}=(1+a)x_{n+1}-ax_n$ となる。

(2)　$x_1=0$，$x_2=1$ のとき，②より $x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)a^{n-1}=a^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$

また，②から $x_{n+2}-ax_{n+1}=x_{n+1}-ax_n$ となるので，

$$x_{n+1}-ax_n=x_2-ax_1=1\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-1+a)x_n=a^{n-1}-1$ となり，$a\neq1$ かつ $a>0$ から，$x_n=\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}$

(3)　①の両辺の y 成分を比べると，

$$y_{n+2}-y_{n+1}=a(y_{n+1}-y_n)+(1-a)\cdot\frac{a^{-n}}{1-a}=a(y_{n+1}-y_n)+a^{-n}$$

さて，$z_n=y_{n+1}-y_n$ とおくと，$z_1=y_2-y_1=1$ で，$z_{n+1}=az_n+a^{-n}\cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，⑤をみたす 1 つの数列を $z_n=ka^{-n}$ (kは定数) とおくと，

$$ka^{-n-1}=a\cdot ka^{-n}+a^{-n}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥より，$k=ka^2+a$ となり，$(1-a^2)k=a$ から $k=\dfrac{a}{1-a^2}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑤⑥から，$z_{n+1}-ka^{-n-1}=a(z_n-ka^{-n})$ となり，

$$z_n-ka^{-n}=(z_1-ka^{-1})a^{n-1}=(1-ka^{-1})a^{n-1}$$

⑦から，$z_n-\dfrac{1}{1-a^2}a^{-n+1}=\left(1-\dfrac{a}{1-a^2}\cdot a^{-1}\right)a^{n-1}=-\dfrac{a^2}{1-a^2}a^{n-1}$ となり，

$$z_n=\frac{1}{1-a^2}(a^{-n+1}-a^{n+1}),\quad y_{n+1}-y_n=\frac{1}{1-a^2}(a^{-n+1}-a^{n+1})\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑧より，$n\geqq2$ において，$y_1=\dfrac{a}{(1-a)^2}$ から，

$$y_n=y_1+\frac{1}{1-a^2}\sum_{l=1}^{n-1}(a^{-l+1}-a^{l+1})=y_1+\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{1-a^{-n+1}}{1-a^{-1}}-\frac{a^2(1-a^{n-1})}{1-a}\right\}$$
$$=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1}{1-a^2}\left(\frac{a-a^{-n+2}}{a-1}-\frac{a^2-a^{n+1}}{1-a}\right)$$
$$=\frac{a(1+a)-a+a^{-n+2}-a^2+a^{n+1}}{(1+a)(1-a)^2}=\frac{a^{-n+2}+a^{n+1}}{(1+a)(1-a)^2}$$

なお，この式は$n=1$のときも成立している。

［解　説］

問題文はベクトルで設定されていますが，実質的には漸化式を解く問題です。計算がやや難の(3)の解法については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

3

問題のページへ

(1)　$x \geqq 2$，$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ に対して，$x \geqq 2$，$x\log 2 \leqq y\log x$，$y \leqq 2$ となり，

$$x \geqq 2,\ \frac{x\log 2}{\log x} \leqq y \leqq 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

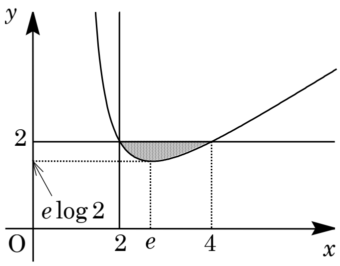
ここで，$f(x) = \dfrac{x\log 2}{\log x}$ とおくと，

$$f'(x) = \log 2\cdot\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

x	2	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	$e\log 2$	↗

これより，$x \geqq 2$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

そして，$f(4) = \dfrac{4\log 2}{\log 4} = 2$ に注意すると，連立不等式①の表す領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ に対して，

$$2 \leqq x \leqq 6,\ (x^y - 2^x)(x^y - x^a) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

(i)　$2^x \leqq x^a\ \big(f(x) \leqq a\big)$ のとき

②より $2 \leqq x \leqq 6$，$2^x \leqq x^y \leqq x^a$ となり，$2 \leqq x \leqq 6$，$f(x) \leqq y \leqq a$

(ii)　$2^x \geqq x^a\ \big(f(x) \geqq a\big)$ のとき

②より $2 \leqq x \leqq 6$，$x^a \leqq x^y \leqq 2^x$ となり，$2 \leqq x \leqq 6$，$a \leqq y \leqq f(x)$

(i)(ii)より，②は $2 \leqq x \leqq 6$ において，$y = f(x)$ と $y = a$ で挟まれた領域を表す。

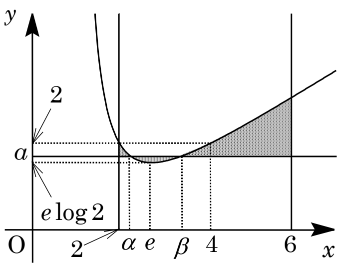
さて，②の表す領域の面積を $S(a)$ とすると，

(Ⅰ) $0 < a < e\log 2$ のとき

a の値の増加に伴って，$S(a)$ は明らかに単調に減少する。

(Ⅱ) $e\log 2 \leqq a < 2$ のとき

$2 \leqq x \leqq 6$ において，$y = f(x)$ と $y = a$ の交点の x 座標を $x = \alpha$，$\beta\ (2 < \alpha \leqq \beta < 4)$ とすると，



$$S(a) = \int_2^{\alpha}\{f(x) - a\}dx + \int_{\alpha}^{\beta}\{a - f(x)\}dx + \int_{\beta}^{6}\{f(x) - a\}dx$$

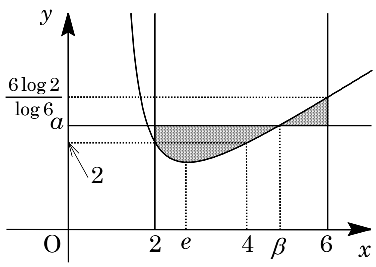
$$= \int_2^{\alpha} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{6} f(x)dx + (-2\alpha + 2\beta - 4)a$$

$$= \int_2^{6} f(x)dx - 2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + 2(-\alpha + \beta - 2)a$$

$$S'(a) = -2\Big(f(\beta)\frac{d\beta}{da} - f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}\Big) + 2\Big(-\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\beta}{da}\Big)a + 2(-\alpha+\beta-2)$$
$$= -2\Big(a\frac{d\beta}{da} - a\frac{d\alpha}{da}\Big) + 2\Big(-\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\beta}{da}\Big)a + 2(-\alpha+\beta-2)$$
$$= 2(-\alpha+\beta-2)$$

ここで，$\beta-\alpha < 4-2 = 2$ であることに注意すると，$S'(a) < 0$ となり，$S(a)$ は単調に減少する。

(Ⅲ) $2 \leqq a < \dfrac{6\log 2}{\log 6}$ のとき



$2 \leqq x \leqq 6$ において，$y = f(x)$ と $y = a$ の交点の x 座標を $x = \beta$ $(4 \leqq \beta < 6)$ とすると，

$$S(a) = \int_2^{\beta}\{a - f(x)\}dx + \int_{\beta}^{6}\{f(x) - a\}dx$$
$$= -\int_2^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{6} f(x)dx + (2\beta - 8)a$$
$$= \int_2^{6} f(x)dx - 2\int_2^{\beta} f(x)dx + 2(\beta-4)a$$

$$S'(a) = -2f(\beta)\frac{d\beta}{da} + 2\frac{d\beta}{da}a + 2(\beta-4) = -2a\frac{d\beta}{da} + 2\frac{d\beta}{da}a + 2(\beta-4)$$
$$= 2(\beta-4)$$

ここで，$\beta - 4 \geqq 0$ から $S'(a) \geqq 0$ となり，$S(a)$ は単調に増加する。

(Ⅳ) $a \geqq \dfrac{6\log 2}{\log 6}$ のとき

a の値の増加に伴って，$S(a)$ は明らかに単調に増加する。

(Ⅰ)～(Ⅳ)より，$S(a)$ は $a > 0$ で連続なので，最小になるのは $a = 2$ のときである。

［解 説］

微積分の総合問題です。(2)では②式の意味を把握して積分計算にもっていき，さらに微分して…と続き，難解ではないものの，かなりのボリュームがあります。

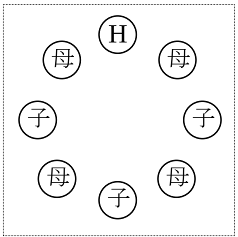
4

問題のページへ

玉 A, 玉 D, 玉 H, 玉 I が 1 個ずつ, 玉 K, 玉 O が 2 個ずつ, 合計 8 個の玉を円形に並べるとき, 2 個の玉 K, 2 個の玉 O を区別し, さらに玉 H の位置を固定して考えて, $(8-1)!=7!$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

(1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率は, 2 個の玉 K の位置交換, 2 個の玉 O の位置交換を考えると, $\dfrac{2!\times 2!}{7!}=\dfrac{1}{1260}$ である。

(2) 子音が隣り合わないのは, 母音の玉 4 個（A, I, O, O）と玉 H 以外の子音の玉 3 個（D, K, K）を交互に並べる場合より, その確率は $\dfrac{4!\times 3!}{7!}=\dfrac{1}{35}$ となる。



これより, 隣り合う子音が存在する確率は,

$$1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

(3) 隣り合う子音が KK だけであるのは, 母音の玉 4 個（A, I, O, O）を並べ, その間の 3 か所から 2 か所を選び, そこに子音の玉 D と玉 KK を入れ, さらに 2 個の玉 K の位置交換を考えると, その確率は, $\dfrac{4!\times {}_3\mathrm{P}_2\times 2!}{7!}=\dfrac{2}{35}$ となる。

すると, 隣り合う子音が存在するとき, それが KK だけである条件つき確率は,

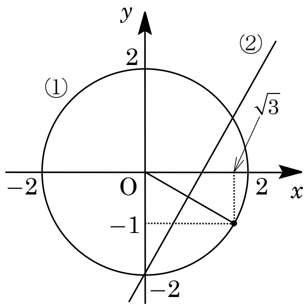
$$\frac{2}{35}\div\frac{34}{35}=\frac{1}{17}$$

［解　説］

円順列をベースに数える基本的な確率の問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　$z\bar{z}=4$ ……①に対して，$|z|^2=4$ から $|z|=2$

すると，z 全体が表す図形は，中心が原点で半径 2 の円である。

また，$|z|=|z-\sqrt{3}+i|$ ……②に対して，

$$|z|=|z-(\sqrt{3}-i)|$$

すると，z 全体が表す図形は，原点と点 $\sqrt{3}-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(2)　$z=x+yi$ とおくと，①は $x^2+y^2=4$ ………③

②は点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ を通り傾き $\sqrt{3}$ の直線より，$y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となり，

$$y=\sqrt{3}x-2 \text{ ………④}$$

③④を連立して $x^2+(\sqrt{3}x-2)^2=4$ となり，$4x^2-4\sqrt{3}x=0$ より $x=0,\ \sqrt{3}$

よって，$x=0$ のとき $y=-2$，$x=\sqrt{3}$ のとき $y=1$ となるので，①と②の共通解は $-2i$ と $\sqrt{3}+i$ である。

(3)　$w=-2i(\sqrt{3}+i)=2-2\sqrt{3}i=4\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ となり，

$$w^n=4^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right\}\quad (n \text{ は整数})$$

これより，w^n が負の実数となるための条件は，

$$\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)<0 \quad \text{かつ} \quad \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)=0$$

よって，k を整数として，$-\dfrac{n\pi}{3}=(2k+1)\pi$ となり，

$$n=-6k-3=6(-k-1)+3$$

すなわち，n は 6 で割った余りが 3 の整数である。

［解　説］

複素数に関する基本的な問題です。なお，(2)は「図から」としてもよいでしょう。