1

解答解説のページへ

k を実数の定数とし，$f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ とする。

(1)　$f(k-1)$ の値を求めよ。

(2)　$|k|<2$ のとき，不等式 $f(x)\geqq 0$ を解け。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$\{a_n\}$ を $a_1=-15$ および $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n}{5}-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたす数列とする。

(1)　a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ。

(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

$\angle A = 90°$，$\angle B = 60°$ である直角三角形 ABC において，その内接円の中心を O，半径を r とおく。また $a = \mathrm{BC}$ とする。

(1) r を a で表せ。

(2) 次の条件をみたす負でない整数 k, l, m, n の組を 1 つ求めよ。

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : k + \sqrt{l}\,,\ \ \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = 1 : m + \sqrt{n}$$

4

解答解説のページへ

箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある。そのうち 5 枚には A, 3 枚には B, 2 枚には C と書かれている。箱から 1 枚ずつ, 3 回カードを取り出す試行を考える。

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ に対して，

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3-(2k-1)(k-1)^2+(k^2-k+1)(k-1)-k+1 \\ &= (k-1)\{(k-1)^2-(2k-1)(k-1)+(k^2-k+1)-1\} \\ &= (k-1)^2\{(k-1)-(2k-1)+k\}=0 \end{aligned}$$

(2)　(1)から，$f(x)$ は $x-k+1$ で割り切れ，

$$f(x)=(x-k+1)(x^2-kx+1)=(x-k+1)\left\{\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+1\right\}$$

ここで，$|k|<2$ から $k^2<4$ となり，$-\dfrac{k^2}{4}+1>0$ から，$\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2-\dfrac{k^2}{4}+1>0$

よって，$f(x)\geqq 0$ の解は，$x-k+1\geqq 0$ から $x\geqq k-1$ である。

［解　説］

3 次不等式についての基本題です。(1)はそのまま展開してもよいのですが，式の特徴に着目して処理をしました。

© 電送数学舎 2022

2

問題のページへ

(1)　$a_1=-15$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{n}{5}-2$ より，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n}{5}-2$ ……(＊)となり，

(i)　$\dfrac{n}{5}-2>0\ (n>10)$ のとき　$a_n<a_{n+1}$

(ii)　$\dfrac{n}{5}-2=0\ (n=10)$ のとき　$a_n=a_{n+1}$

(iii)　$\dfrac{n}{5}-2<0\ (1\leqq n<10)$ のとき　$a_n>a_{n+1}$

(i)〜(iii)より，$a_1>a_2>\cdots>a_9>a_{10}=a_{11}<a_{12}<a_{13}<\cdots$

よって，a_n が最小となる自然数 n は，$n=10,\ 11$ である。

(2)　(＊)から，$n\geqq 2$ において，$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{5}-2\right)=-15+\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n-1}(k-10)$ となり，

$$a_n=-15+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\{(-9)+(n-11)\}(n-1)=-15+\frac{1}{10}(n-20)(n-1)$$
$$=\frac{1}{10}(n^2-21n-130)=\frac{1}{10}(n+5)(n-26)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと，(2)から，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=\dfrac{1}{10}(n+6)(n-25)$ となり，

(i)　$\dfrac{1}{10}(n+6)(n-25)>0\ (n>25)$ のとき　$S_n<S_{n+1}$

(ii)　$\dfrac{1}{10}(n+6)(n-25)=0\ (n=25)$ のとき　$S_n=S_{n+1}$

(iii)　$\dfrac{1}{10}(n+6)(n-25)<0\ (1\leqq n<25)$ のとき　$S_n>S_{n+1}$

(i)〜(iii)より，$S_1>S_2>\cdots>S_{24}>S_{25}=S_{26}<S_{27}<S_{28}<\cdots$

よって，S_n が最小となる自然数 n は，$n=25,\ 26$ である。

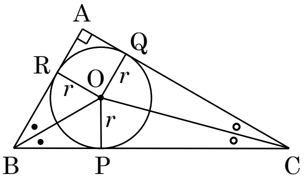
［解 説］

数列の和と一般項についての基本的な問題です。(3)は(1)と同様な方法で記述しましたが，その内容は，負の数を加えれば和は小さくなるということだけです。

© 電送数学舎 2022

3

問題のページへ



(1)　$\angle A = 90°$，$\angle B = 60°$，$a = BC$ である直角三角形 ABC において，

$$AB = a\cos 60° = \frac{a}{2},\ CA = a\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ここで，$\triangle ABC$ の内接円の中心を O，半径を r とし，内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とおく。このとき，四角形 AROQ は正方形となるので，$AR = AQ = r$ より，

$$BP = BR = \frac{a}{2} - r,\ CP = CQ = \frac{\sqrt{3}}{2}a - r$$

よって，$\left(\frac{a}{2} - r\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - r\right) = a$ から，$r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$ となる。

(2)　(1)より，$OA = \sqrt{2}r = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a$ となり，条件より，負でない整数 $k,\ l,\ m,\ n$ に対して，$OA : OB = 1 : k + \sqrt{l}$，$OA : OC = 1 : m + \sqrt{n}$ から，

$$OB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(k+\sqrt{l})a \cdots\cdots\cdots①,\ OC = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(m+\sqrt{n})a \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$BP = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}a = \frac{3-\sqrt{3}}{4}a$ となり，

$$OB = \frac{BP}{\cos\angle PBO} = \frac{BP}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}BP = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(k+\sqrt{l})a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$ となり，

$$k + \sqrt{l} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

すると，k, l は負でない整数より，$k = 0$，$l = 2$ で成り立つ。

同様に，$CP = a - \frac{3-\sqrt{3}}{4}a = \frac{1+\sqrt{3}}{4}a$ から，$OC = \frac{CP}{\cos\angle PCO} = \frac{CP}{\cos 15°}$ となり，

ここで，$\cos 15° = \cos(60° - 45°) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ から，

$$OC = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}CP = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{4}a = \frac{1}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(m+\sqrt{n})a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ となり，

$$m + \sqrt{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$$

すると，m, n は負でない整数より，$m = 1$，$n = 3$ で成り立つ。

以上より，$(k,\ l,\ m,\ n) = (0,\ 2,\ 1,\ 3)$ が求める 1 つの組である。

© 電送数学舎 2022

［解 説］

直角三角形の内接円という有名な題材に，整数を絡めた標準的な問題です。

© 電送数学舎 2022

$\boxed{4}$

問題のページへ

A のカード 5 枚，B のカード 3 枚，C のカード 2 枚が入っている箱から，カードを 1 枚ずつ 3 回取り出す。

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率は，

(i) 1 回目と 3 回目に A のカードを取り出すとき　$\dfrac{5\times10\times5}{10^3}=\dfrac{25}{100}$

(ii) 1 回目と 3 回目に B のカードを取り出すとき　$\dfrac{3\times10\times3}{10^3}=\dfrac{9}{100}$

(iii) 1 回目と 3 回目に C のカードを取り出すとき　$\dfrac{2\times10\times2}{10^3}=\dfrac{4}{100}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{25}{100}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{4}{100}=\dfrac{19}{50}$

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率は，

(i) 1 回目と 3 回目に A のカードを取り出すとき　$\dfrac{5\times4\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{20}{10\cdot9}$

(ii) 1 回目と 3 回目に B のカードを取り出すとき　$\dfrac{3\times2\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{6}{10\cdot9}$

(iii) 1 回目と 3 回目に C のカードを取り出すとき　$\dfrac{2\times1\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{2}{10\cdot9}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{20}{10\cdot9}+\dfrac{6}{10\cdot9}+\dfrac{2}{10\cdot9}=\dfrac{14}{45}$

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合，2 回目に C のカードを取り出す事象を E，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する事象を F とすると，

$$P(E)=\frac{2\times9\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

また，2 回目に C のカードを取り出し，しかも 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する事象 $E\cap F$ について，一致するカードは A または B なので，

$$P(E\cap F)=\frac{5\times2\times4}{{}_{10}\mathrm{P}_3}+\frac{3\times2\times2}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\frac{40}{10\cdot9\cdot8}+\frac{12}{10\cdot9\cdot8}=\frac{13}{180}$$

したがって，2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率は，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{13}{180}\div\frac{1}{5}=\frac{13}{36}$$

［解 説］

確率の基本的な問題です。上の解答例では，条件のきつい方から，たとえば(2)では，1 回目→3 回目→2 回目と数えています。

© 電送数学舎 2022