$\boxed{1}$

解答解説のページへ

三角形 OAB において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を C とおく。

(1)　C の座標を a を用いて表せ。

(2)　a が $a>0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。

ただし，$|\mathrm{AB}|$ および $|\mathrm{BC}|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

正の実数 x, y が，方程式 $\dfrac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}$ ……(＊) を満たすとする。

(1)　y^2 を x を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y$ が (＊) および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a_1=2$，$b_1=1$ および

$$a_{n+1}=2a_n+3b_n\,,\ \ b_{n+1}=a_n+2b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$がある。$c_n=a_nb_n$ とおく。

(1)　c_2 を求めよ。

(2)　c_n は偶数であることを示せ。

(3)　n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ。

5

解答解説のページへ

座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=\sin\theta\quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

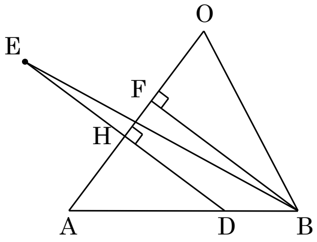
と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1) 右図の△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ のとき，$\overrightarrow{OF}=k\vec{a}$（$k$ は実数）とおくと，

BF ⊥ OA から，

$$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0,\ k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$16k-6=0$ から $k=\dfrac{3}{8}$ となり，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{3}{8}\vec{a}$ である。

(2) AD : DB = 2 : 1，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とし，OA と DE の交点を H とすると，DH // BF，$\mathrm{DH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BF}$ に注意して，

$$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DH}=2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\Big(\frac{3}{8}\vec{a}-\vec{b}\Big)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\Big(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\Big)+\Big(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\Big)=\dfrac{5}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ である。

(3) (2)から，$|\overrightarrow{DE}|=\Big|\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\Big|=\dfrac{1}{6}|3\vec{a}-8\vec{b}|$ となり，

$$|3\vec{a}-8\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-48\vec{a}\cdot\vec{b}+64|\vec{b}|^2=144-288+64|\vec{b}|^2=64|\vec{b}|^2-144$$

すると，$|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{64|\vec{b}|^2-144}=\dfrac{2}{3}\sqrt{4|\vec{b}|^2-9}$ となる。

また，AH : HF = 2 : 1，$\mathrm{AF}:\mathrm{AO}=\Big(1-\dfrac{3}{8}\Big):1=5:8$ より，

$$\mathrm{HF}=\frac{1}{3}\mathrm{AF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}\mathrm{AO}=\frac{5}{24}\cdot 4=\frac{5}{6}$$

条件より，$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{5}{9}$ なので，$\dfrac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot\mathrm{HF}=\dfrac{5}{9}$ となり，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4|\vec{b}|^2-9}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9},\ \sqrt{4|\vec{b}|^2-9}=2$$

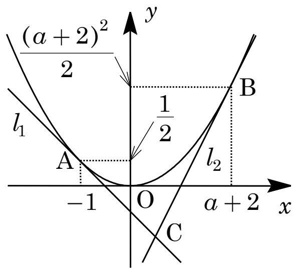
これより，$4|\vec{b}|^2=13$ となり，$|\vec{b}|=\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用に関する基本題です。解答例は，計算で押し通すのではなく，相似を利用したもので記述しました。

2

問題のページへ



(1)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，$y'=x$ より，点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線 l_1 の方程式は，

$$y-\frac{1}{2}=-(x+1),\quad y=-x-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

点 $\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線 l_2 の方程式は，

$$y-\frac{(a+2)^2}{2}=(a+2)\{x-(a+2)\}$$

$$y=(a+2)x-\frac{(a+2)^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$-x-\dfrac{1}{2}=(a+2)x-\dfrac{(a+2)^2}{2}$ となり，

$$(a+3)x=\frac{(a+2)^2-1}{2},\quad (a+3)x=\frac{(a+3)(a+1)}{2}$$

$a\neq-3$ から，$x=\dfrac{a+1}{2}$ となり，①から $y=-\dfrac{a+1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a+2}{2}$

よって，l_1 と l_2 の交点 C の座標は，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+1}{2},\ -\dfrac{a+2}{2}\right)$ である。

(2)　$a>0$ のとき，(1)より，

$$|\mathrm{AB}|^2=\{(a+2)+1\}^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}-\frac{1}{2}\right\}^2=(a+3)^2+\frac{1}{4}(a+3)^2(a+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}(a+3)^2(a^2+2a+5)$$

$$|\mathrm{BC}|^2=\left\{(a+2)-\frac{a+1}{2}\right\}^2+\left\{\frac{(a+2)^2}{2}+\frac{a+2}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}(a+3)^2+\frac{1}{4}(a+2)^2(a+3)^2=\frac{1}{4}(a+3)^2(a^2+4a+5)$$

これより，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{\dfrac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}}$ となり，$f(a)=\dfrac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5}$ とおくと，

$$f(a)=1-\frac{2a}{a^2+4a+5}=1-\frac{2}{a+4+\dfrac{5}{a}}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{5}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{5}{a}}=2\sqrt{5}$ となり，

$$f(a)\geqq 1-\frac{2}{2\sqrt{5}+4}=1-\frac{1}{\sqrt{5}+2}=3-\sqrt{5}$$

なお，等号は $a=\dfrac{5}{a}\ (a=\sqrt{5})$ のときに成立する。

すると，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}=\sqrt{f(a)}$ から，$a=\sqrt{5}$ のとき $\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ は最小となる。

［解 説］

頻出の放物線の接線に最大・最小を組み合わせた問題です。なお，(2)の後半は微分法で処理する方法も考えられます。

3

問題のページへ

(1)　$x>0$，$y>0$ において，$\dfrac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}$ ………($*$)

ここで，$3^{4x}=X$，$3^{y^2}=Y$ とおくと，$9^{4x}=(3^2)^{4x}=(3^{4x})^2=X^2$

$9^{y^2+1}=9\cdot(3^2)^{y^2}=9\cdot(3^{y^2})^2=9Y^2$，$3^{4x+y^2}=3^{4x}\cdot 3^{y^2}=XY$

($*$) から，$\dfrac{X^2+9Y^2}{6}=XY$ となり，$X^2-6XY+9Y^2=0$

$(X-3Y)^2=0$，$X=3Y$

すると，$3^{4x}=3\cdot 3^{y^2}=3^{1+y^2}$ から $4x=1+y^2$ となり，$y^2=4x-1$ ………①

(2)　$x>0$，$y>0$ なので，$1-\dfrac{x}{y}>0$ から $y>x>0$ となり，$y^2>x^2$ である。

①から，$4x-1>x^2$ すなわち $x^2-4x+1<0$ より，$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ ………②

さて，$P=\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ とおくと，②のもとで，$1+\dfrac{x}{y}>0$，$1+\dfrac{x}{y}\neq 1$，$1-\dfrac{x}{y}>0$，$1-\dfrac{x}{y}\neq 1$ であり，①から，

$$P=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)+\log_4\left(1-\frac{x}{y}\right)=\log_4\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)=\log_4\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$=\log_4\left(1-\frac{x^2}{4x-1}\right)$$

さて，$f(x)=1-\dfrac{x^2}{4x-1}$ とおくと，

$$f'(x)=-\frac{2x(4x-1)-x^2\cdot 4}{(4x-1)^2}$$

$$=-\frac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$$

x	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

すると，②において $f(x)$ は増減が右上表のようになり，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。これより，P の最大値は $\log_4\dfrac{3}{4}=\log_4 3-1$ である。

［解　説］

指数方程式と微分法の融合問題です。与えられた方程式($*$)は，見かけほどのものではありません。

4

問題のページへ

(1)　$a_1=2$，$b_1=1$ で，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……②より，

$$a_2=2a_1+3b_1=2\cdot2+3\cdot1=7,\ b_2=a_1+2b_1=2+2\cdot1=4$$

すると，$c_n=a_nb_n$ から，$c_2=a_2b_2=7\cdot4=28$

(2)　まず，①②から帰納的に，a_n，b_n は自然数である。以下，c_n が偶数であること数学的帰納法により示す。

(i)　$n=1$ のとき　$c_1=a_1b_1=2\cdot1=2$ より，c_1 は偶数である。

(ii)　$n=k$ のとき　c_k は偶数であると仮定すると，①②から，

$$c_{k+1}=a_{k+1}b_{k+1}=(2a_k+3b_k)(a_k+2b_k)=2{a_k}^2+7a_kb_k+6{b_k}^2$$
$$=7c_k+2({a_k}^2+3{b_k}^2)\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，③から c_{k+1} も偶数となる。

(i)(ii)より，c_n は偶数である。

(3)　n が偶数のとき c_n は 28 で割り切れる，すなわち m を自然数とするとき c_{2m} は 28 で割り切れることを数学的帰納法により示す。

(i)　$m=1$ のとき　(1)から $c_2=28$ なので，c_2 は 28 で割り切れる。

(ii)　$m=l$ のとき　c_{2l} が 28 で割り切れると仮定すると，①②③から，

$$c_{2(l+1)}=7c_{2l+1}+2({a_{2l+1}}^2+3{b_{2l+1}}^2)$$
$$=7\{7c_{2l}+2({a_{2l}}^2+3{b_{2l}}^2)\}+2\{(2a_{2l}+3b_{2l})^2+3(a_{2l}+2b_{2l})^2\}$$
$$=49c_{2l}+14({a_{2l}}^2+3{b_{2l}}^2)+2(7{a_{2l}}^2+24c_{2l}+21{b_{2l}}^2)$$
$$=97c_{2l}+28{a_{2l}}^2+84{b_{2l}}^2=97c_{2l}+28({a_{2l}}^2+3{b_{2l}}^2)$$

すると，$c_{2(l+1)}$ も 28 で割り切れる。

(i)(ii)より，c_{2m} は 28 で割り切れる，すなわち n が偶数のとき c_n は 28 で割り切れる。

［解　説］

漸化式と数学的帰納法について，整数の絡んだ問題です。

5

問題のページへ

(1)　曲線 $C : x=(1+\cos\theta)\cos\theta$， $y=\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ に対して，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$$

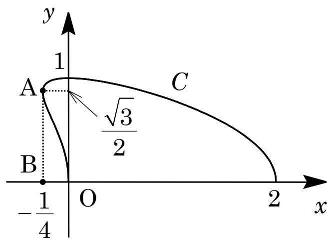
$$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0

これより，x, y の増減は右表のようになり，曲線 C の概形は右下図の通りである。

すると，C 上の点で x 座標の値が最小になる点 A について，その x 座標の値 a は，$a=-\dfrac{1}{4}$ である。

(2)　$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ とするとき，線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積 S は，



$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta(-\sin\theta)(2\cos\theta+1)\,d\theta$$

$$=-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(2\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=-\left[\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$$

［解　説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。計算は易しめです。