1

解答解説のページへ

初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 OAB において, 辺 AB を $2:1$ に内分する点を D, 直線 OA に関して点 D と対称な点を E, 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし, $|\vec{a}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき, $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 x に対して，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく。

(1)　$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq \pi$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

k を $k>-1$ を満たす実数とする。直線 $l: y=(1-k)x+k$ および放物線 $C: y=x^2$ を考える。C と l で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1)　S_1 を k を用いて表せ。

(2)　S_2 を k を用いて表せ。

(3)　k が $k>-1$ を満たしながら動くとき，S_2-S_1 の最大値を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$であるとき，まず$a_1=S_1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 9=3$となり，

$n\geqq 2$において，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n+5)$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+7)-(n-1)(2n+5)\}=\frac{1}{6}n(6n+12)=n(n+2)$$

$n=1$をあてはめると，$a_1=1\cdot 3=3$となり，成立している。

したがって，$a_n=n(n+2)$である。

(2)　$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$とおくと，(1)から，$n\geqq 2$のとき，

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

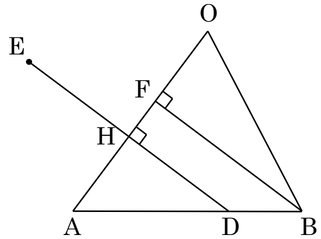
なお，$n=1$のときは$T_1=\frac{1}{3}$となるが，(*)は成立している。

［解 説］

数列の和と一般項の関係についての基本事項の確認題です。

2

問題のページへ



(1)　右図の△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\vec{a}$（$k$ は実数）とおくと，

BF ⊥ OA から，

$$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0,\ k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$16k-6=0$ から $k=\dfrac{3}{8}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}$ である。

(2)　AD : DB = 2 : 1，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とし，OA と DE の交点を H とすると，DH // BF，$\mathrm{DH}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BF}$ に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DH}}=2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{5}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ である。

(3)　$9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ のとき，(1)(2)から，$9\left|\dfrac{5}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\right|=20\left|\dfrac{3}{8}\vec{a}\right|$ となり，

$$\frac{3}{2}|5\vec{a}-4\vec{b}|=20\cdot\frac{3}{8}\cdot4,\ |5\vec{a}-4\vec{b}|=20,\ 25|\vec{a}|^2-40\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=400$$

すると，$400-240+16|\vec{b}|^2=400$ となり，$|\vec{b}|^2=15$ から $|\vec{b}|=\sqrt{15}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用に関する基本題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$とおくと，

$$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-t^2$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2t^2$$

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ となり，$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ ………(*)

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)=-10t^2+\sqrt{3}t+6$$

ここで，$f(x)=0$ の解は，$f(x)=g(t)$ とおき $g(t)=0$ から，$10t^2-\sqrt{3}t-6=0$

$$t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+240}}{20}=\frac{\sqrt{3}\pm 9\sqrt{3}}{20}$$

これより，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$ となるが，$-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}<-\dfrac{1}{2}$ なので，(*)から $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

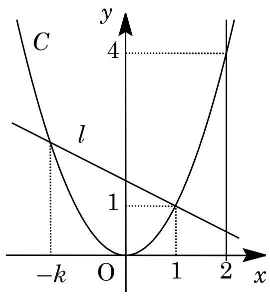
よって，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$ である。

［解　説］

誘導つきで，三角方程式の解を求める問題です。なお，(1)については加法定理で展開する方法もあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　直線 $l: y=(1-k)x+k$ ……①と放物線 $C: y=x^2$ ……②を連立して,

$$x^2-(1-k)x-k=0,\ (x-1)(x+k)=0 \cdots\cdots③$$

③の解は $x=-k,\ 1$ となり，$k>-1$ から $-k<1$ である。

すると，C と l で囲まれた部分の面積 S_1 は,

$$S_1=\int_{-k}^{1}\{(1-k)x+k-x^2\}dx$$
$$=-\int_{-k}^{1}(x-1)(x+k)dx=\frac{1}{6}(1+k)^3$$

(2)　C と l と直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_{1}^{2}\{x^2-(1-k)x-k\}dx=\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{1-k}{2}x^2-kx\Big]_1^2$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1-k}{2}\cdot 3-k=\frac{1}{2}k+\frac{5}{6}$$

(3)　$k>-1$ のとき，$S_2-S_1=\frac{1}{2}k+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}(1+k)^3$ となり，$f(k)=S_2-S_1$ とおくと,

$$f'(k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+k)^2=-\frac{1}{2}k(k+2)$$

k	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		↗	$\frac{2}{3}$	↘

これより，$f(k)$ は増減が右表のようになり，$k=0$ のとき最大値 $\frac{2}{3}$ をとる。すなわち，S_2-S_1 の最大値は $\frac{2}{3}$ である。

［解　説］

放物線と面積を題材にした頻出の基本題です。