1

解答解説のページへ

三角形 ABC について，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{6}$ が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3)　直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 2 点$\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$を通る直線 l を考える。

(1) l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし, 格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2) l 上の格子点のうち, 原点との距離が最小となる点を A とする。また, l 上の A 以外の格子点のうち, 原点との距離が最小となる点を B とする。さらに, A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha\,,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ および(2)で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1,\quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt = ax$$

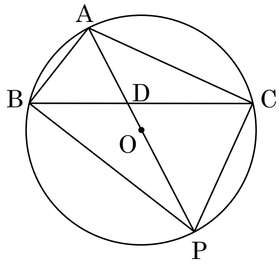
さらに，$f(0)=\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$|\overrightarrow{AB}|=1$ ……①，$|\overrightarrow{AC}|=2$ ……②，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ である

△ABC に余弦定理を適用すると，

$$6=1+4-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\,,\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　△ABC の外接円の中心 O，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P として，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおく。

線分 AP は外接円の直径から，$\angle ABP=\angle ACP=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ なので，④から，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left((s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)=0$$

①③を適用すると，$(s-1)\cdot1^2+t\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ となり，$2s-t=2$ ………⑥

また，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}$ なので，⑤から，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left(s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}\right)=0$$

②③を適用すると，$s\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(t-1)\cdot2^2=0$ となり，$-s+8t=8$ ………⑦

⑥⑦より，$15s=24$ から $s=\dfrac{8}{5}$ となり，$t=2\cdot\dfrac{8}{5}-2=\dfrac{6}{5}$ である。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ となり，直線 AP と直線 BC の交点を D とすると，

$$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}=\frac{8}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}k\overrightarrow{AC}\quad(k\text{ は定数})$$

すると，$\dfrac{8}{5}k+\dfrac{6}{5}k=1$ から $k=\dfrac{5}{14}$ となるので，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ より，

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{16}{49}\cdot1^2+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{49}\cdot2^2=\frac{40}{49}$$

よって，$AD=\sqrt{\dfrac{40}{49}}=\dfrac{2}{7}\sqrt{10}$ となる。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)では，AO＝BO＝CO として解くことも可能ですが，計算量を考えて，上記のように円周角に注目しました。

2

問題のページへ

(1)　2 点$\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$を通る直線 l の方程式は，$16x+9y=1$ ………①

ここで，x, y が整数のとき，①の解の 1 つとして$(x,\ y)=(4,\ -7)$をとると，

$$16\times4+9\times(-7)=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$16(x-4)+9(y+7)=0$，$16(x-4)=-9(y+7)$

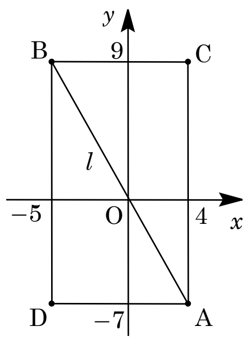
16 と 9 は互いに素なので，k を整数として，$x-4=9k$，$y+7=-16k$ となり，

$$x=9k+4,\quad y=-16k-7$$

(2)　k を整数として，点 $\mathrm{X}(9k+4,\ -10k-7)$ とおくと，

$$\mathrm{OX}^2=(9k+4)^2+(-10k-7)^2=337k^2+296k+65$$
$$=337\left(k+\frac{148}{337}\right)^2-\frac{148^2}{337}+65$$

ここで，$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{148}{337}<0$ より，OX は $k=0$ のとき最小，$k=-1$ のとき 2 番目に小さくなり，条件より $\mathrm{A}(4,\ -7)$，$\mathrm{B}(-5,\ 9)$ である。これより，$\mathrm{C}(4,\ 9)$ となる。



さらに，$\mathrm{D}(-5,\ -7)$ とおくと，長方形 ACBD の内部および周上にある格子点の個数は，

$$\{4-(-5)+1\}\times\{9-(-7)+1\}=170$$

そして，対角線 AB は直線 l の一部であり，その上の格子点は，点 A と点 B だけなので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部および周上にある格子点の個数は，

$$\frac{170-2}{2}+2=86$$

［解　説］

格子点と不定方程式の融合問題です。(2)では，線分 AB 上の格子点は両端だけということに着目しています。

3

問題のページへ

(1) 1 個のさいころを続けて n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。

このとき，出た目の最大公約数が 3 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 3 または 6 の場合から，すべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$$

(2) まず，出た目の最大公約数が 2 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 2 または 4 または 6 の場合から，すべて 4 の場合およびすべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{3^n-2}{6^n}$ である。

また，出た目の最大公約数が 4 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 4 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 5 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 5 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 6 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 6 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

以上より，出た目の最大公約数が 1 となる確率は，

$$1-\left(\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}\right)=1-\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

(3) 出た目の最小公倍数が 20 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかで，しかも少なくとも 1 個が 4，かつ少なくとも 1 個が 5 の場合である。

まず，X_1，X_2，…，X_n がすべて 1, 2, 4, 5 のいずれかという事象を U とし，この中で，少なくとも 1 個が 4 であるという事象を A，少なくとも 1 個が 5 であるという事象を B とおくと，これらの確率について，

$$P(U)=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\frac{4^n}{6^n},\ P(\overline{A})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{3^n}{6^n},\ P(\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{3^n}{6^n}$$

そして，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は X_1，X_2，…，X_n がすべて 1 または 2 という事象になり，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\frac{2^n}{6^n}$$

したがって，出た目の最小公倍数が 20 となる事象 $A\cap B$ の確率は，

$$P(U)-P(\overline{A\cap B})=\frac{4^n}{6^n}-P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{4^n}{6^n}-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

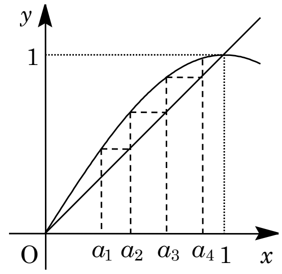
$$=\frac{4^n}{6^n}-\frac{3^n}{6^n}-\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}=\frac{4^n+2^n-2\cdot3^n}{6^n}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)は(1)の結果を利用し，余事象を考えています。また，(3)は構図がやや複雑なので，その整理のために，事象を記号で設定しました。

4

問題のページへ



(1)　$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とするとき，数列$\{a_n\}$について，

$$a_1=\alpha\ (0<\alpha<1),\ a_{n+1}=f(a_n)$$

まず，すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ であることを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\alpha\ (0<\alpha<1)$ より成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<a_k<1$ と仮定する。

$0<\sin\dfrac{\pi a_k}{2}<\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ より，$0<a_{k+1}<1$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ である。

次に，$0<x<1$ において，$g(x)=f(x)-x=\sin\dfrac{\pi x}{2}-x$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1,\ g''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}<0$$

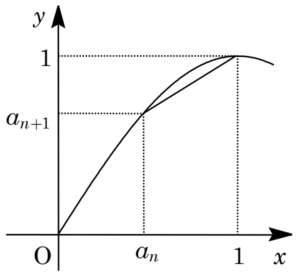
すると，$g'(x)$ は単調に減少し，$g'(0)=\dfrac{\pi}{2}-1>0$，$g'(1)=-1<0$

これより，$0<x<1$ に，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\beta$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗		↘	0

したがって，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となり，

$0<a_n<1$ から，$g(a_n)=f(a_n)-a_n=a_{n+1}-a_n>0$ すなわち $a_{n+1}>a_n$ である。



(2)　$0<x<1$ において，$h(x)=\dfrac{1-f(x)}{1-x}$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{-f'(x)(1-x)+\{1-f(x)\}}{(1-x)^2}$$

さらに，$k(x)=-f'(x)(1-x)+\{1-f(x)\}$ とおくと，

$$k'(x)=-f''(x)(1-x)+f'(x)-f'(x)$$
$$=-f''(x)(1-x)=\frac{\pi^2}{4}(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}>0$$

これより，$0<x<1$ で $k(x)$ は単調に増加し，$k(x)<k(1)=1-f(1)=0$

すると，$h'(x)<0$ となり，$h(x)$ は単調に減少し，$0<a_n<a_{n+1}<1$ から，

$$h(a_n)>h(a_{n+1}),\ \frac{1-f(a_n)}{1-a_n}>\frac{1-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}}$$

よって，$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\dfrac{1-f(a_n)}{1-a_n}$ から，$b_n>b_{n+1}$ すなわち $b_{n+1}<b_n$ となる。

(3)　(2)より，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=b_n<b_1$ となり，$0<a_n<1$ から，

$$0<1-a_{n+1}<b_1(1-a_n)$$

これより，$0<1-a_n<(1-a_1)b_1^{n-1}$となり，$0<a_1<a_2<1$から，

$$0<b_1=\frac{1-a_2}{1-a_1}<\frac{1-a_1}{1-a_1}=1$$

すると，$\lim_{n\to\infty}(1-a_1)b_1^{n-1}=0$となるので，$\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$すなわち$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

また，$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\dfrac{f(1)-f(a_n)}{1-a_n}$となり，平均値の定理から，

$$b_n=f'(c_n)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi c_n}{2}\quad(a_n<c_n<1)$$

$n\to\infty$のとき，$c_n\to 1$となるので，$\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}=0$である。

［解 説］

漸化式と極限の問題です。解答例の 2 つの図から，(3)の結論は容易に推測できます。ただ，(1)と(2)は証明が題意ですので，それなりのスタイルで記述しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$0<f(x)<1$，$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=ax\ (a>0)$，さらに $f(0)=\dfrac{1}{3}$ に対して，

$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt$ とおくと，

$$F(x)=\int_0^x\left\{\frac{f'(t)}{1-f(t)}+\frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt=\Big[-\log\big(1-f(t)\big)+\log f(t)\Big]_0^x$$

$$=\Big[\log\frac{f(t)}{1-f(t)}\Big]_0^x=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{f(0)}{1-f(0)}=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{1}{2}$$

$$=\log\frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

すると，$F(x)=ax$ より $\dfrac{2f(x)}{1-f(x)}=e^{ax}$ となり，$2f(x)=e^{ax}\big(1-f(x)\big)$ から，

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)>0$ なので，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}dx=\Big[\frac{1}{a}\log(e^{ax}+2)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{a}\{\log(e^a+2)-\log 3\}=\frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3}$$

ここで，$g(a)=\log(e^a+2)$ とおくと，$g'(a)=\dfrac{e^a}{e^a+2}$ となり，

$$\lim_{a\to+0}S(a)=\lim_{a\to+0}\frac{g(a)-g(0)}{a}=g'(0)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

［解　説］

積分方程式と関数の極限の融合問題です。(1)については，与えられた式の両辺を x で微分しても，その後は上の解答例と同様な作業になります。また, (2)の後半は，式変形でも極限値が求められますが，ここでは $S(a)$ の形から微分係数の定義と関連させました。