1

解答解説のページへ

k を正の実数とする。座標平面上に直線 $l: y=kx+1$ と放物線 $C: y=x^2$ がある。l と C の交点のうち x 座標の小さい方を P, 大きい方を Q とする。さらに, 線分 PQ の垂直二等分線を m とし, m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R, 大きい方を S とする。

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ。

(2) k が正の実数を動くとき, 線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ。また, そのときの P と Q の座標を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ を考える。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。

(3)　a を実数の定数とする。$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。

(1)　X_1，X_2，…，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2)　X_1，X_2，…，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

4

解答解説のページへ

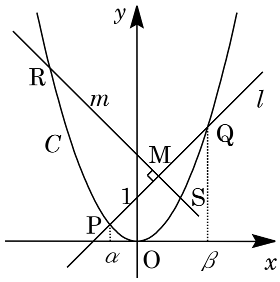
座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y=2x^2$ と $C_2 : y=-x^2+2x-\dfrac{19}{8}$ がある。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた直線のうち傾きが負であるものを l とする。C_1, x 軸および l が囲む部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$l : y = kx+1\ (k>0)$ ……①と $C : y = x^2$ ……②を連立し,

$$x^2 = kx+1,\ x^2-kx-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③は $D = k^2+4>0$ より異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{P}(\alpha,\ k\alpha+1),\ \mathrm{Q}(\beta,\ k\beta+1)$$

線分 PQ の中点 M の座標は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{k(\alpha+\beta)+2}{2}\right)$ となり，③より $\alpha+\beta=k$ から，$\mathrm{M}\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2+2}{2}\right)$ である。

(2)　線分 PQ の垂直二等分線 m は，点 M を通り，傾きが $-\dfrac{1}{k}$ から，その方程式は,

$$y-\frac{k^2+2}{2} = -\frac{1}{k}\left(x-\frac{k}{2}\right),\ y = -\frac{1}{k}x+\frac{k^2+3}{2} \cdots\cdots\cdots ④$$

②④を連立して，$x^2 = -\dfrac{1}{k}x+\dfrac{k^2+3}{2}$，$x^2+\dfrac{1}{k}x-\dfrac{k^2+3}{2}=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤は $D = \dfrac{1}{k^2}+2(k^2+3)>0$ より異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\gamma,\ \delta$ $(\gamma<\delta)$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{R}\left(\gamma,\ -\frac{1}{k}\gamma+\frac{k^2+3}{2}\right),\ \mathrm{S}\left(\delta,\ -\frac{1}{k}\delta+\frac{k^2+3}{2}\right)$$

これより，線分 RS の中点 N の y 座標は，⑤より $\gamma+\delta = -\dfrac{1}{k}$ から,

$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k}\gamma+\frac{k^2+3}{2}-\frac{1}{k}\delta+\frac{k^2+3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k}\right)+k^2+3\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(k^2+\frac{1}{k^2}+3\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$k^2+\dfrac{1}{k^2} \geqq 2\sqrt{k^2\cdot\dfrac{1}{k^2}} = 2$ となり，等号は $k^2 = \dfrac{1}{k^2}$ のとき，すなわち $k>0$ から $k=1$ のときに成り立つ。

すると，y は $k=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}(2+3) = \dfrac{5}{2}$ をとる。

このとき，③は $x^2-x-1=0$，①は $y=x+1$ となるので,

$$\mathrm{P}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

［解　説］

放物線を題材にした問題です。問題文で指示された通りに計算していくと，結論が導けます。

2

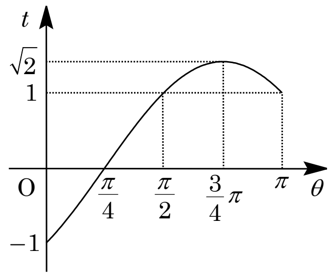
問題のページへ

(1)　$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ に対し，$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta$$

これより，$\sin 2\theta=1-t^2$ となり，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

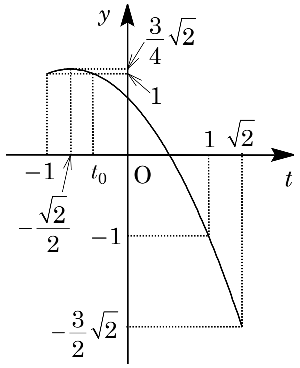
(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ から，$0\leqq\theta\leqq\pi$ におけるグラフは右図のようになり，$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。



ここで，$f(\theta)=g(t)$ とおくと，

$$g(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-t+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

すると，$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $y=g(t)$ のグラフは右図のようになり，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$，このとき $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，



$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

よって，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ である。

また，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最小値は $-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，このとき $t=\sqrt{2}$ から，

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

よって，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ である。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ の個数は，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=t$ ……①かつ $g(t)=a$ ……②を満たす θ の個数として考える。

まず，$g(t)=1$ を満たす t を $t=-1,\ t_0$ とおくと，

$$\frac{1}{2}(-1+t_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ t_0=1-\sqrt{2}$$

さて，①かつ②を満たす θ が 2 個存在するときについて，a の値で場合分けをして調べると，

(i)　$a=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(ii)　$1 \leqq a < \frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から, t は $-1 \leqq t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ に 1 個, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t \leqq 1-\sqrt{2}$ に 1 個, 合わせて 2 個存在する。このとき, それぞれ t に対して, ①を満たす θ は 1 個ずつ存在するので, ①かつ②を満たす θ は 2 個存在し適する。

(iii)　$-\frac{3}{2}\sqrt{2} \leqq a < 1$ のとき

(a)　$-1 < a < 1$ のとき

②を満たす t が $1-\sqrt{2} < t < 1$ に 1 個存在する。この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(b)　$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < a \leqq -1$ のとき

②を満たす t が $1 \leqq t < \sqrt{2}$ に 1 個存在する。この t に対して, ①を満たす θ は 2 個存在するので, ①かつ②を満たす θ は 2 個存在し適する。

(c)　$a = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき

②から $t = \sqrt{2}$ となり, この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(i)～(iii)より, $f(\theta) = a$ を満たす θ が 2 個存在する a の範囲は,

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < a \leqq -1,\ 1 \leqq a < \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

［解 説］

三角方程式の解の個数の問題です。一般的にややこしい問題が多く, (3)もその 1 例です。不注意によるミスを防ぐために, グラフを書き, 眼で判断しながら計算していくことが重要です。

3

問題のページへ

(1)　1 個のさいころを続けて n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。

このとき，出た目の最大公約数が 3 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 3 または 6 の場合から，すべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{2^n-1}{6^n}$$

(2)　まず，出た目の最大公約数が 2 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 2 または 4 または 6 の場合から，すべて 4 の場合およびすべて 6 の場合を除けばよいので，その確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{3^n-2}{6^n}$ である。

また，出た目の最大公約数が 4 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 4 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 5 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 5 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

出た目の最大公約数が 6 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 6 の場合から，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{1}{6^n}$ である。

以上より，出た目の最大公約数が 1 となる確率は，

$$1-\left(\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{6^n}\right)=1-\frac{2^n+3^n}{6^n}$$

［解　説］

確率の基本的な問題です。(2)は(1)の結果を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　$C_1: y=2x^2$ ……①と $C_2: y=-x^2+2x-\frac{19}{8}$ ……②に対して，①から $y'=4x$ となり，C_1 上の点 $(t,\ 2t^2)$ における接線の方程式は,

$$y-2t^2=4t(x-t),\ \ y=4tx-2t^2 \ \cdots\cdots③$$

③と②を連立すると，$4tx-2t^2=-x^2+2x-\frac{19}{8}$ となり,

$$x^2+2(2t-1)x+\frac{19}{8}-2t^2=0$$

③は C_2 に接することより，$D/4=(2t-1)^2-\frac{19}{8}+2t^2=0$ となり,

$$6t^2-4t-\frac{11}{8}=0,\ \ 48t^2-32t-11=0,\ \ (12t-11)(4t+1)=0$$

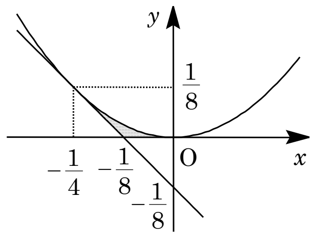
よって，$t=\frac{11}{12},\ -\frac{1}{4}$ となり，C_1 と C_2 の両方に接する直線は，③から,

$$y=\frac{11}{3}x-\frac{121}{72},\ \ y=-x-\frac{1}{8}$$

(2)　C_1 と C_2 の両方に接する直線のうち，傾きが負なのは,

$$l: y=-x-\frac{1}{8}$$

l と x 軸との交点は，$-x-\frac{1}{8}=0$ より $x=-\frac{1}{8}$



すると，C_1，x 軸および l が囲む部分の面積 S は,

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}2x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{4}}^{0}-\frac{1}{2^7}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^5}-\frac{1}{2^7}=\frac{4-3}{3\cdot 2^7}=\frac{1}{384}$$

［解　説］

接線および定積分と面積についての基本題です。(1)は，計算量の少なそうな方法で記しています。