**1**

解答解説のページへ

$p$ を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2,\ -2,\ 1)$，P$(p,\ -1,\ 2)$ があり，3 点 O, A, B が定める平面を $\alpha$ とする。また，点 P から平面 $\alpha$ に垂線を下ろし，$\alpha$ との交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 $a, b$ を $p$ を用いて表せ。

(2) 点 Q が△OAB の周または内部にあるような $p$ の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$x$ を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を $\theta$ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\tan\theta$ を $x$ で表せ。

(2)　$x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの $x$ の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

$n$ を自然数とする。数列2, 1, 2, 1, 1のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が $n$ となるものの個数を $s_n$ とする。例えば，$n=1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである。したがって，$s_1=1$ となる。$n=2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列1, 1の 2 つである。したがって，$s_2=2$ となる。

(1) $s_3$ を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，$s_n$ を $s_{n-1}$ と $s_{n-2}$ を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての $n$ に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 $\alpha$，$\beta$ の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ。

(4) $s_n$ を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

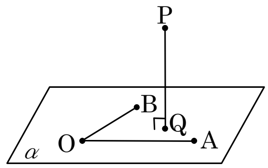
実数 $a$, $b$, $c$ に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての $x$ に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1)　$b$ と $c$ を $a$ で表せ。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，$a$ の値の範囲を定めよ。

**1**

問題のページへ




(1)　3 点 $A(-1,\ 2,\ 0)$，$B(2,\ -2,\ 1)$，$P(p,\ -1,\ 2)$ に対し，

点 Q は原点 O, A, B で定まる平面 $\alpha$ 上にあるので，実数 $a$, $b$ を用いて，$\overrightarrow{OQ}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ と表せ,

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$ より，$\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=0$ となり，

$$a(1+4)+b(-2-4)-(-p-2)=0,\ 5a-6b=-p-2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OB}$ より，$\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=0$ となり，

$$a(-2-4)+b(4+4+1)-(2p+2+2)=0,\ -6a+9b=2p+4\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$3a=3(-p-2)+2(2p+4)$ となり，$a=\dfrac{p+2}{3}$

$$b=\frac{1}{9}(2p+4+2p+4)=\frac{4p+8}{9}$$

(2)　点 Q が△OAB の周または内部にある条件は，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$a+b\leqq 1$ なので，

$$\frac{p+2}{3}\geqq 0\cdots\cdots③,\ \ \frac{4p+8}{9}\geqq 0\cdots\cdots④,\ \ \frac{p+2}{3}+\frac{4p+8}{9}\leqq 1\cdots\cdots⑤$$

③から $p\geqq -2$ となり，この範囲は④を満たす。

⑤から $3(p+2)+4p+8\leqq 9$ となり，$p\leqq -\dfrac{5}{7}$ である。

よって，$p<0$ と合わせて，求める $p$ の範囲は $-2\leqq p\leqq -\dfrac{5}{7}$ である。

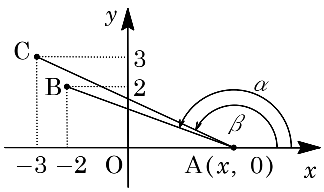
## ［解　説］

空間ベクトルの応用に関する基本問題です。計算も複雑ではありません。

**2**

問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ に対し，直線 AB，直線 AC と $x$ 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ $\alpha$，$\beta$ とおくと，




$$\tan\alpha=\frac{-2}{x+2},\ \tan\beta=\frac{-3}{x+3}$$

さて，直線 AB と直線 AC のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\alpha-\beta$ から，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{-2}{x+2}-\dfrac{-3}{x+3}}{1+\dfrac{-2}{x+2}\cdot\dfrac{-3}{x+3}}$$

$$=\frac{-2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)+6}=\frac{x}{x^2+5x+12}$$

(2)　(1)から $\tan\theta=\dfrac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}$ となり，$x>0$ なので相加平均と相乗平均の関係から，

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

等号は $x=\dfrac{12}{x}$ すなわち $x=2\sqrt{3}$ のときに成立し，

$$\frac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}\leqq\frac{1}{5+4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-5}{23}$$

よって，$\tan\theta$ は $x=2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$ をとる。

［解　説］

2 直線のなす角を題材にした三角関数の応用題ですが，位置関係が明確なので場合分けの必要はありません。そして，相加平均と相乗平均の関係を利用した最大・最小が絡んだ構図となっています。いずれも基本的な内容です。

**3**

問題のページへ

(1)　各項が 1 または 2 の有限数列について，すべての項の和が $n$ となるものの個数を $s_n$ とする。

このとき，$n=3$ すなわち項の和が 3 となる数列には，2 項からなる数列 1，2 と 2，1，および 3 項からなる 1，1，1 があるので，これより $s_3=3$ である。

(2)　すべての項の和が $n$ となる数列の個数 $s_n$ について，$n\geqq 3$ のとき，

(i)　初項が 1 のとき

第 2 項から第 $n$ 項までの和が $n-1$ より，$s_{n-1}$ 個の数列がある。

(ii)　初項が 2 のとき

第 2 項から第 $n$ 項までの和が $n-2$ より，$s_{n-2}$ 個の数列がある。

(i)(ii)より，$s_n=s_{n-1}+s_{n-2}$ ………①

(3)　まず，$s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ ……②から，$s_n=(\alpha+\beta)s_{n-1}-\alpha\beta s_{n-2}$

すると，①から $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ となり，$(\alpha,\ \beta)$ は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解なので，1 組求めると，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

(4)　②より，$s_{n+2}-\alpha s_{n+1}=\beta(s_{n+1}-\alpha s_n)\ (n\geqq 1)$ となり，

$$s_{n+1}-\alpha s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

同様に，$s_{n+2}-\beta s_{n+1}=\alpha(s_{n+1}-\beta s_n)\ (n\geqq 1)$ から，

$$s_{n+1}-\beta s_n=(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③－④より，$(\beta-\alpha)s_n=(s_2-\alpha s_1)\beta^{n-1}-(s_2-\beta s_1)\alpha^{n-1}$ ………⑤

ここで，$s_1=1$，$s_2=2$ から，$s_2-\alpha s_1=2-\alpha=2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\beta^2$

$$s_2-\beta s_1=2-\beta=2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\alpha^2$$

⑤より，$(\beta-\alpha)s_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$ となり，$s_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

［解　説］

漸化式の応用問題です。(2)の関係を求めるところがポイントですが，隣接 3 項間型の場合は，原則的に最初か最後に着目するので，ここでは前者で解答例を書きました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=3x^2-6ax+b$

条件より，$g(x)$ を１次関数として，$f(x)=f'(x)g(x)-6x$ ………①

$$f(x)+6x=f'(x)g(x) \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$f(x)+6x=x^3-3ax^2+(b+6)x+c$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)+6x=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}\right)+\left(-2a^2+\frac{2}{3}b+6\right)x+\left(\frac{ab}{3}+c\right)$$

すると，②から，$g(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$ となり，

$$-2a^2+\frac{2}{3}b+6=0 \cdots\cdots\cdots ③,\quad \frac{ab}{3}+c=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③から $b=3a^2-9$ となり，④に代入すると，$c=-a^3+3a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-9)x-a^3+3a$

$$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2-9$$
$$=3\{(x-a)^2-3\}$$

$f'(x)=0$ の解は $x=a\pm\sqrt{3}$ となることより，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $a-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $a+\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

すると，$f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，$f(a-\sqrt{3})>0$ かつ $f(a+\sqrt{3})<0$ であり，①から，

$$f(a-\sqrt{3})=-6(a-\sqrt{3})>0,\quad f(a+\sqrt{3})=-6(a+\sqrt{3})<0$$

よって，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ である。

［解 説］

微分の応用題です。与えられた①式が(2)の極値を求める誘導になっています。