1

解答解説のページへ

$t>1$ とする。$\triangle$ABC において $\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{BC}=t-1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ とし，点 O を $\triangle$ABC の外心とする。

(1) $\angle$ACB の大きさを求めよ。

(2) 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする。

(1)　m を a と b で表せ。

(2)　$a+2b \leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また，このときの m の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

赤色，青色，黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色，青色，黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

(1) s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2) $s>t>u$ となる確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

p を実数とする。関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

(1)　このような p の値の範囲を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ。また，このときの S_1 の値を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$t>1$ で，$\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{BC}=t-1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ である△ABC において，

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{2+(t-1)^2-(t^2+1)}{2\sqrt{2}(t-1)}=\frac{-2(t-1)}{2\sqrt{2}(t-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

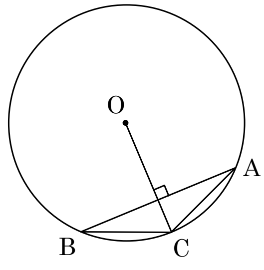
よって，$\angle\mathrm{ACB}=135°$ である。

(2)　線分 AB の中点を M とするとき，点 O は△ABC の外心なので，$\mathrm{MO}\perp\mathrm{AB}$ である。

また，条件から $\mathrm{CO}\perp\mathrm{AB}$ なので，3 点 C, M, O は一直線上にあり，線分 AB の中点 M に対して $\mathrm{CM}\perp\mathrm{AB}$ である。

よって，△ABC は $\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ の二等辺三角形となり，

$t-1=\sqrt{2}$，$t=1+\sqrt{2}$



［解 説］

図形の計量に関する基本的な問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

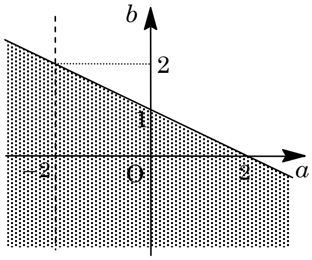
(1)　関数 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対して，$0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とおくと，

(i)　$-\dfrac{a}{2}<0\ (a>0)$ のとき　$m=f(0)=b$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1\ (-2\leqq a\leqq 0)$ のとき　$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

(iii)　$-\dfrac{a}{2}>1\ (a<-2)$ のとき　$m=f(1)=1+a+b$

(2)　$a+2b\leqq 2$ を ab 平面上の図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



(i)　$a>0$ のとき

(1) から $m=b$ となるので，直線 $b=m$ が網点部の $a>0$ の領域と共有点をもつ条件は，図より $m<1$ である。

(ii)　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき

(1) から $m=-\dfrac{a^2}{4}+b$ となるので，放物線 $b=\dfrac{a^2}{4}+m$ ……① が網点部の $-2\leqq a\leqq 0$ の領域と共有点をもつ条件を求める。

まず，①と境界線 $a+2b=2$ ……②が接する場合，①②を連立して，

$$a+\frac{a^2}{2}+2m=2\,,\ a^2+2a+4m-4=0\cdots\cdots③$$

すると，$D/4=1-(4m-4)=0$ から $m=\dfrac{5}{4}$ となる。このとき③から $a=-1$ であり，この値は $-2\leqq a\leqq 0$ を満たしている。

よって，①が網点部の領域と共有点をもつ条件は，図より $m\leqq\dfrac{5}{4}$ である。等号は $a=-1$，②から $b=\dfrac{1}{2}(2+1)=\dfrac{3}{2}$ のときに成立する。

(iii)　$a<-2$ のとき

$m=1+a+b$ となるので，直線 $b=-a+m-1$ が網点部の $a<-2$ の領域と共有点をもつ条件は，$(a,\ b)=(-2,\ 2)$ を通る場合を考え，図より $m<1$ である。

(i)～(iii)より，m は $(a,\ b)=\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

［解　説］

(1)は 2 次関数の最大・最小に関する定型的な問題です。(2)では 1 文字を消去してもよいですが，解答例では領域と最大・最小の考え方を採用しています。

3

問題のページへ

(1)　赤色，青色，黄色のサイコロを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

ここで，s が 500 以上になるのは，$R=5$，6 で B，Y は任意より，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。同様に，t, u が 500 以上になるのも，確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

(i)　s, t, u がすべて 500 以上のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　s, t, u の 2 つが 500 以上となるとき　その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ である。

(i)(ii)より，s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率は，

$$\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$$

(2)　$s>t$ より $100R+10B+Y>100B+10Y+R$ となり，$11R>10B+Y$ ………①

すると，①を満たす R, B, Y の条件は，

(i)　$R>B$ のとき　任意の Y で①は成立する。

(ii)　$R=B$ のとき　①は $B>Y$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$R>B$ または $R=B>Y$ である。

同様に，$t>u$ より $100B+10Y+R>100Y+10R+B$ となり，

$$11B>10Y+R \quad \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②を満たす R, B, Y の条件は，$B>Y$ または $B=Y>R$ である。

よって，$s>t>u$ となる R, B, Y の条件は，①かつ②から，

$$R>B>Y \ \cdots\cdots\cdots③,\quad R=B>Y \ \cdots\cdots\cdots④$$

以上より，③となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り，④となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20+15}{6^3}=\dfrac{35}{216}$ である。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)の①式については，初めは R の値で場合分けをしたのですが，規則性がみつかったため，それをまとめて記したのが上の解答例です。

4

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^3 + px^2 + x$ ……①，$C_2 : y = x^2$ ……②を連立して，

$$x^3 + px^2 + x = x^2,\ x\{x^2 + (p-1)x + 1\} = 0$$

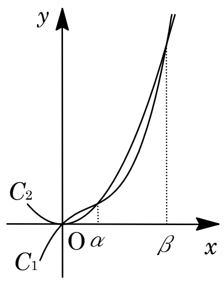
すると，$x = 0$ または $x^2 + (p-1)x + 1 = 0$ ……③となり，条件から C_1 と C_2 は $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつことより，③は異なる正の解をもつことになる。

そこで，定数項が $1 > 0$ であることに着目すると，その条件は，

$$D = (p-1)^2 - 4 > 0 \text{ ………④},\ -(p-1) > 0 \text{ ………⑤}$$

すると，④より $(p-1+2)(p-1-2) > 0$ から $p < -1$，$3 < p$，⑤より $p < 1$ なので，求める p の値の範囲は $p < -1$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq \alpha$ と $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，



$$S_1 = \int_0^{\alpha} \{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \{x^3 + (p-1)x^2 + x\}dx$$

$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} -\{(x^3 + px^2 + x) - x^2\}dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 + (p-1)x^2 + x\}dx$$

ここで，$S_1 = S_2$ から $S_1 - S_2 = 0$ となり，

$$\int_0^{\alpha} \{x^3 + (p-1)x^2 + x\}dx + \int_{\alpha}^{\beta} \{x^3 + (p-1)x^2 + x\}dx = 0$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\beta} \{x^3 + (p-1)x^2 + x\}dx = 0$ ………⑥

⑥から，$\displaystyle\left[\frac{x^4}{4} + \frac{p-1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\beta} = 0$ となり，$\displaystyle\frac{\beta^4}{4} + \frac{p-1}{3}\beta^3 + \frac{\beta^2}{2} = 0$ で $\beta > 0$ から，

$$3\beta^2 + 4(p-1)\beta + 6 = 0 \text{ ………⑦}$$

また，③から，$\beta^2 + (p-1)\beta + 1 = 0$ ………⑧

⑦⑧より，$\beta^2 - 2 = 0$ から $\beta = \sqrt{2}$ となり，$2 + \sqrt{2}(p-1) + 1 = 0$ より，

$$p - 1 = -\frac{3}{\sqrt{2}},\ p = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\ \ （p < -1 \text{ を満たす}）$$

このとき，$\alpha\beta = 1$ から $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 + x\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

［解　説］

定積分と面積についての超頻出の問題です。もっとも(2)の⑥式だけですが。