1　　解答解説のページへ

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P，Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$|\vec{a}| = r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とする。ただし，$0 < r < 1$ とする。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。

3　　解答解説のページへ

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする。

(1)　数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2)　確率 p_n を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつとする。このような $a,\ b$ が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

1　　　　問題のページへ

(1)　自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n\geqq 1$，$2k-1\geqq 1$ より，$(2k-1)n\geqq 2k-1$ となり，

$$a\geqq k^2+2k-1 \text{ ………②}$$

(2)　n が自然数で $n(n+1)+7$ が平方数のとき，$n(n+1)+7>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+7=(n+k)^2 \text{（k は自然数）………③}$$

すると，②から，$7\geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-8\leqq 0$

$$(k+4)(k-2)\leqq 0,\ -4\leqq k\leqq 2$$

k は自然数から，$k=1,\ 2$ となる。

(i)　$k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+7=(n+1)^2$ となり，$n=6$

(ii)　$k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+7=(n+2)^2$ となり，$n=1$

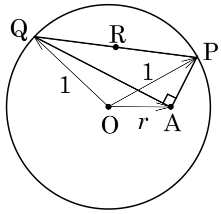
(i)(ii)より，$n=1,\ 6$ である。

［解　説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　線分 PQ の中点が R より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}-2\vec{a})$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}-2\vec{a}|^2$ となり，$|\vec{p}|=1$，$|\vec{q}|=1$，$|\vec{a}|=r$ に注意すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{4}(1+1+4r^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}-4\vec{a}\cdot\vec{p}-4\vec{a}\cdot\vec{q})$$
$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})+r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$ となり，$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{q}-\vec{a})=0$ から，

$$\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}+r^2=0,\ \ r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}=-\vec{p}\cdot\vec{q}\cdots\cdots\cdots②$$

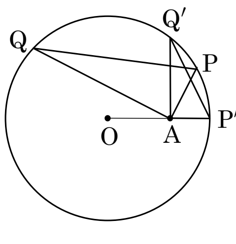
①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{2}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})\cdots\cdots\cdots③$

(2)　点 B は直線 OA 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\vec{a}$　(k は定数）とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}-2k\vec{a})$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}-2k\vec{a}|^2$ となり，②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{4}(1+1+4k^2r^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}-4k\vec{a}\cdot\vec{p}-4k\vec{a}\cdot\vec{q})$$
$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})+k(r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q})+(k^2-k)r^2$$
$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-k\vec{p}\cdot\vec{q}+(k^2-k)r^2=\frac{1}{2}+(k^2-k)r^2+\frac{1}{2}(1-2k)\vec{p}\cdot\vec{q}$$



ここで，点 A は点 O と異なるので，2 点 P，Q の位置により線分 PQ の長さ，すなわち $2|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|$ の大きさが異なる。すると，③から $\vec{p}\cdot\vec{q}$ の値も異なる。

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定である条件は，$1-2k=0$ すなわち $k=\frac{1}{2}$ である。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\vec{a}$ となるので，点 B は線分 OA の中点となり，

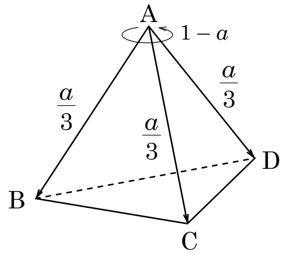
$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)r^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}r^2$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は普通に解いたのですが，(2)の途中で，△APQ の外接円の直径が PQ，半径が AR ということに気付き，ほとんど計算不要で③が導けました。解答例は書き直していませんが。

3

問題のページへ



(1)　点 P が $n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは, n 秒後に頂点 A にいて確率 $1-a$ で留まるか, n 秒後に頂点 A 以外にいて確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るかのいずれかである。

すると, 点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率 p_n について,

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+\frac{a}{3}(1-p_n)=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}$$

なお, 点 P は初め頂点 A にいたことより，$p_1=1-a$ となる。

(2)　(1)の漸化式を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\left(1-\dfrac{4}{3}a\right)\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$ となり,

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{4}-a\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{4}{3}a\right)^{n}+\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

確率と漸化式についての頻出問題です。計算も穏やかです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt$ に対して，$f(0)=c$ とおくと，

$$c=\int_{-1}^{1}f(t)dt\cdots\cdots\cdots①,\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+c\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，

$$c=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{3}t^3-at^2+(a^2-b)t+c\right\}dt=2\int_{0}^{1}(-at^2+c)dt=-\frac{2}{3}a+2c$$

よって，$c=\dfrac{2}{3}a$ となり，$f(0)=\dfrac{2}{3}a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\dfrac{2}{3}a$ となり，

$$f'(x)=x^2-2ax+(a^2-b)=(x-a)^2-b$$

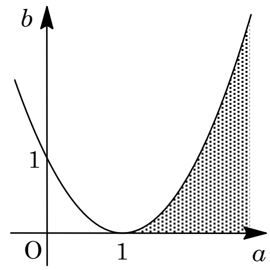
ここで，$f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，右表より $1<\alpha<\beta$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，求める条件は，$a>1$ かつ $-b<0$ かつ $f'(1)=1-2a+a^2-b>0$ となり，

$$a>1,\ 0<b<(a-1)^2$$

そして，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



［解　説］

(1)はおきかえ型の積分方程式，(2)は極値の条件を求めるもので，ともに基本的で頻出の題材です。