1

解答解説のページへ

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

　$a,\ b$ を実数とする。曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)$は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である。$f(x)$は$(x+1)^2$で割ると 1 余り，$(x-1)^2$で割ると 2 余る。$f(x)$を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

実数 a, b は $-1<a<1$, $-1<b<1$ を満たす。座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ b,\ -1)$, $\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{D}(1,\ -b,\ 1)$ をとる。

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき, a と b の関係を表す等式を求めよ。

(2) a, b が(1)の等式を満たすとき, A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

n を 3 以上の奇数とする。円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

正の整数 m, n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ ……①のとき，

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=n\sum_{k=1}^{m} k-2\sum_{k=1}^{m} k^2 =n\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)\{3n-2(2m+1)\}=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)$$

①より，$\dfrac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)=2^3\cdot 11\cdot 23$ となり，

$$m(m+1)(3n-4m-2)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，m と $m+1$ は連続 2 整数なので，どちらか一方が奇数であることに着目して，②の右辺 $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の奇数の約数を調べ，m または $m+1$ の値を絞り込むと，

$$1,\ 3,\ 11,\ 23,\ 3\cdot 11=33,\ 3\cdot 23=69,\ 11\cdot 23=253,\ 3\cdot 11\cdot 23=759$$

これより，$m(m+1)$ の値として考えられるのは，

$$1\cdot 2,\ 3\cdot 4,\ 2\cdot 3,\ 11\cdot 12,\ 10\cdot 11,\ 23\cdot 24,\ 22\cdot 23,\ 33\cdot 34,\ 32\cdot 33,$$

$$69\cdot 70,\ 68\cdot 69,\ 253\cdot 254,\ 252\cdot 253,\ 759\cdot 760,\ 758\cdot 759$$

まず，$253\cdot 254$，$252\cdot 253$，$759\cdot 760$，$758\cdot 759$ は，②の右辺 $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ より大きいので不適である。また，$10\cdot 11$，$33\cdot 34$，$32\cdot 33$，$69\cdot 70$，$68\cdot 69$ は，②の右辺 $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の約数でないので不適である。すると，

(i)　$m(m+1)=1\cdot 2$ のとき　$m=1$，$3n-4m-2=6072$ となり，$n=2026$

(ii)　$m(m+1)=3\cdot 4$ のとき　$m=3$，$3n-4m-2=1012$ となり，$n=342$

(iii)　$m(m+1)=2\cdot 3$ のとき　$m=2$，$3n-4m-2=2024$ となり，$n=678$

(iv)　$m(m+1)=11\cdot 12$ のとき　$m=11$，$3n-4m-2=92$ となり，$n=46$

(v)　$m(m+1)=23\cdot 24$ のとき　$m=23$，$3n-4m-2=22$ となり，整数 n はない

(vi)　$m(m+1)=22\cdot 23$ のとき　$m=22$，$3n-4m-2=24$ となり，$n=38$

(i)～(vi)より，求める正の整数の組 $(m,\ n)$ は，

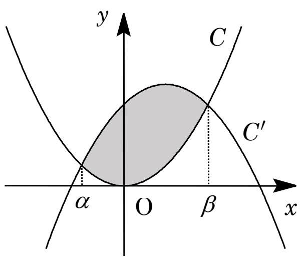
$$(1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38)$$

［解　説］

定番の整数問題です。ただ，②から値を絞り込むとき，連続 2 整数ということぐらいしか手掛かりがないので，場合分けがどうしても増えてしまいます。

2

問題のページへ



曲線 $C: y=x^2$ ……①と曲線 $C': y=-x^2+ax+b$ ……②について, C と C' は点 $(t,\ t^2)$ を共有し, その点におけるそれぞれの接線は直交しているとする。

すると, ①から $y'=2x$, ②から $y'=-2x+a$ なので,

$$t^2=-t^2+at+b \cdots\cdots\cdots ③$$

$$2t(-2t+a)=-1 \cdots\cdots\cdots ④$$

③から $2t^2-at=b$, ④から $-4t^2+2at=-1$ であるので, $b=\dfrac{1}{2}$ ……⑤となり,

$$2t^2-at=\frac{1}{2},\ \ 4t^2-2at-1=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥は異なる 2 実数解をもち, これを $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{4},\ \ \beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{4}$$

このとき, C と C' で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\left(-x^2+ax+\frac{1}{2}\right)-x^2\right\}dx=\int_\alpha^\beta\left(-2x^2+ax+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{24}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3$$

すると, $a=0$ のとき, S は最小値 $\dfrac{1}{24}(\sqrt{4})^3=\dfrac{1}{3}$ をとる。

［解 説］

頻出タイプの微積分の総合問題です。なお, 本問より, $b=\dfrac{1}{2}$ のとき C と C' は 2 交点で直交することがわかります。

$\boxed{3}$

問題のページへ

4 次の係数が 1 の 4 次多項式 $f(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余ることより，a, b, c, d を実数として，

$$f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)+1$$
$$=x^4+(a+2)x^3+(2a+b+1)x^2+(a+2b)x+b+1 \cdots\cdots\cdots ①$$
$$f(x)=(x-1)^2(x^2+cx+d)+2$$
$$=x^4+(c-2)x^3+(-2c+d+1)x^2+(c-2d)x+d+2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$a+2=c-2 \cdots\cdots\cdots ③$，$2a+b+1=-2c+d+1 \cdots\cdots\cdots ④$

$a+2b=c-2d \cdots\cdots\cdots ⑤$，$b+1=d+2 \cdots\cdots\cdots ⑥$

③より $c=a+4$，⑥より $d=b-1$ となり，④⑤に代入すると，

$2a+b+1=-2(a+4)+b-1+1$，$4a=-9$，$a=-\dfrac{9}{4} \cdots\cdots\cdots ⑦$

$a+2b=a+4-2(b-1)$，$4b=6$，$b=\dfrac{3}{2} \cdots\cdots\cdots ⑧$

⑦⑧を①に代入すると，$f(x)=x^4-\dfrac{1}{4}x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$ である。

［解 説］

整式の除法に関する問題です。商を設定して普通に解きました。なお，やや範囲外になりますが，$f(-1)=1$，$f(1)=2$，$f'(-1)=f'(1)=0$ を利用する手もあります。

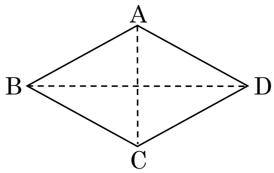
$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　4 点 $A(a,\ -1,\ -1)$，$B(-1,\ b,\ -1)$，$C(-a,\ 1,\ 1)$，$D(1,\ -b,\ 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{AD}=(1-a,\ -b+1,\ 2),\ \overrightarrow{BC}=(-a+1,\ 1-b,\ 2)$$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ から，四角形 ABCD は平行四辺形であり，四角形 ACBD と四角形 ABDC は平行四辺形でない。



すると，4 点 A, B, C, D がひし形の頂点となるのは，四角形 ABCD がひし形であるときなので，AC ⊥ BD より，

$$\overrightarrow{AC}=(-2a,\ 2,\ 2)=2(-a,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{BD}=(2,\ -2b,\ 2)=2(1,\ -b,\ 1)$$

よって，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ から $-a-b+1=0$ となり，$a+b=1$ である。

(2)　(1)から $b=1-a$ となり，$-1<b<1$ から $-1<1-a<1$ すなわち $0<a<2$ である。

すると，$-1<a<1$ と合わせ，$0<a<1$ において，

$$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{a^2+1+1}=2\sqrt{a^2+2}$$

$$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{1+b^2+1}=2\sqrt{b^2+2}=2\sqrt{(1-a)^2+2}=2\sqrt{a^2-2a+3}$$

さて，ひし形 ABCD の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a^2+2}\cdot2\sqrt{a^2-2a+3}=2\sqrt{(a^2+2)(a^2-2a+3)}$$

ここで，$f(a)=(a^2+2)(a^2-2a+3)=a^4-2a^3+5a^2-4a+6$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(a)&=4a^3-6a^2+10a-4\\&=2(2a-1)(a^2-a+2)\\&=2(2a-1)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}\end{aligned}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	6	$\searrow$	$\frac{81}{16}$	$\nearrow$	6

すると，$0<a<1$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{81}{16}$ をとる。

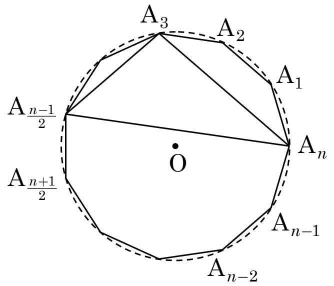
したがって，$S=2\sqrt{f(a)}$ から，S の最小値は $2\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{2}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの応用問題です。(1)で平行四辺形がひし形になる条件を，隣り合う辺の長さが等しいとしてもよいのですが，(2)のひし形の面積に(対角線)×(対角線)÷2 を利用しようと思ったため，AC ⊥ BD で処理をしました。

5

問題のページへ



3 以上の奇数 n に対して，点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を $A_1A_2\cdots A_n$ とおく。

そして，n 個の頂点から異なる 3 点を同時に選び，選んだ 3 点を頂点とする三角形が O を内部に含む確率を p_n，内部に含まない確率を q_n とおく。

まず，n 個の頂点から異なる 3 点を選ぶ場合の数は，

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

ここで，n が 5 以上の奇数で，1 つの頂点が A_n の三角形が O を内部に含まないとき，残りの頂点を，$1\leqq i<j\leqq\dfrac{n-1}{2}$ として，A_i，A_j とする。

このとき，i の選び方の数 N は，$j=2$，$j=3$，…，$j=\dfrac{n-1}{2}$ の場合を考え，

$$N={}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{\frac{n-3}{2}}\mathrm{C}_1=1+2+\cdots+\frac{n-3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}(n-3)(n-1)\ \text{（通り）}$$

これより，最長辺 A_nA_j で O を内部に含まない三角形は N 個となる。

そして，これらの三角形を O のまわりに回転して考えると，O を内部に含まない三角形は合わせて nN 個となり，

$$nN=\frac{1}{8}n(n-3)(n-1)$$

したがって，三角形が O を内部に含まない確率 q_n は，

$$q_n=\frac{nN}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{6}{8}\cdot\frac{n(n-3)(n-1)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

なお，$n=3$ のとき $q_n=0$ となり，このときも成立している。

さらに，n は奇数のため，点 O が三角形の辺上に位置する場合はないので，$p_n+q_n=1$ となり，

$$p_n=1-q_n=1-\frac{3(n-3)}{4(n-2)}=\frac{n+1}{4(n-2)}$$

［解　説］

図形と確率についての問題です。n の値を 5，7，9，…として，余事象を考えるという方針を立てました。なお，今年の東大・文系に，三角形を四角形にしただけの問題が出ていましたので，その解答例を流用しています。