1

解答解説のページへ

$2^a3^b+2^c3^d=2022$ を満たす 0 以上の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組を求めよ。

2

解答解説のページへ

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき, $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x,\ y$ について,「$|x-y| \leqq x+y$」であることの必要十分条件は「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」であることを示せ。

(2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ。

$$|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2$$

4

解答解説のページへ

t を実数とし，座標空間に点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ をとる。また，$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を D とする。点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき，線分 AP の動く範囲を W とし，W の体積を $f(t)$ とする。

(1)　$f(-1)$ を求めよ。

(2)　$f(t)$ のグラフを描き，$f(t)$ の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

中身の見えない 2 つの箱があり, 1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており, もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている。どちらかの箱を選び, 選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す, という操作を繰り返す。

(1) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ。n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ。

(2) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ。n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ。

1　　　　問題のページへ

整数 a, b, c, d に対し，$2^a3^b+2^c3^d=2022$ ($a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0$) ………①

まず，$a=0$ とすると，①より $3^b+2^c3^d=2022$

ここで，$c\geqq 1$ のとき 2^c3^d は偶数となるが，3^b は偶数でないので，その和が偶数 2022 とはならない。すると，$c=0$ であり，このとき，

$$3^b+3^d=2022 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$b\leqq d$ のときは，②から $3^b(1+3^{d-b})=2\times 3\times 337$ となり，$b=0,\ 1$ である。

・$b=0$ のとき　$1+3^d=2022$ より $3^d=2021$ となり，適する d は存在しない。

・$b=1$ のとき　$1+3^{d-1}=674$ より $3^d=673$ となり，適する d は存在しない。

$b>d$ のときも同様なので，②を満たす b, d は存在しない。

したがって，$a\neq 0$ すなわち $a\geqq 1$ である。同様に $c\geqq 1$ である。

次に，$b=0$ とすると，①より $2^a+2^c3^d=2022$

ここで，$d\geqq 1$ のとき 2^c3^d は 3 の倍数となるが，2^a は 3 の倍数でないので，その和が 3 の倍数 2022 とはならない。すると，$d=0$ であり，このとき，

$$2^a+2^c=2022 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，$a\leqq c$ のときは，③から $2^a(1+2^{c-a})=2\times 3\times 337$ となり，$a=0,\ 1$ である。

・$a=0$ のとき　$1+2^c=2022$ より $2^c=2021$ となり，適する c は存在しない。

・$a=1$ のとき　$1+2^{c-1}=1011$ より $2^{c-1}=1010$ となり，適する c は存在しない。

$a>c$ のときも同様なので，③を満たす a, c は存在しない。

したがって，$b\neq 0$ すなわち $b\geqq 1$ である。同様に $d\geqq 1$ である。

以上より，整数 a, b, c, d はすべて 1 以上の整数となり，①の両辺を 2×3 で割ると，

$$2^{a-1}3^{b-1}+2^{c-1}3^{d-1}=337$$

そこで，$a-1=k$，$b-1=l$，$c-1=m$，$d-1=n$ とおくと，

$$2^k3^l+2^m3^n=337 \quad (k\geqq 0,\ l\geqq 0,\ m\geqq 0,\ n\geqq 0) \cdots\cdots\cdots ④$$

(i)　$k\leqq m$ かつ $l\leqq n$ のとき

④より，$2^k3^l(1+2^{m-k}3^{n-l})=337$ となり，337 は素数なので，$k=l=0$ であり，

$$1+2^m3^n=337,\ 2^m3^n=336,\ 2^m3^n=2^4\times 3\times 7 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

これより，⑤を満たす m, n は存在しない。

(ii)　$k\leqq m$ かつ $l>n$ のとき

④より，$2^k3^n(3^{l-n}+2^{m-k})=337$ となり，337 は素数なので，$k=n=0$ であり，

$$3^l+2^m=337 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

すると，$3^l<337$ から，$1\leqq l\leqq 5$ となり，

・$l=1$ のとき　$2^m=334=2\times 167$ より，⑥を満たす m は存在しない。

・$l=2$ のとき　$2^m=328=2^3\times 41$ より，⑥を満たす m は存在しない。

・$l=3$のとき　$2^m=310=2\times5\times31$より，⑥を満たすmは存在しない。

・$l=4$のとき　$2^m=256=2^8$より，⑥は$m=8$で満たされている。

・$l=5$のとき　$2^m=94=2\times47$より，⑥を満たすmは存在しない。

よって，④を満たすk, l, m, nは，$(k,\ l,\ m,\ n)=(0,\ 4,\ 8,\ 0)$である。

(iii)　$k>m$かつ$l\leqq n$のとき

④より，$2^m3^l(2^{k-m}+3^{n-l})=337$となり，337は素数なので，$l=m=0$であり，

$$2^k+3^n=337\cdots\cdots\cdots⑦$$

(ii)と同様に考えると，⑦は$k=8$，$n=4$で満たされている。

よって，④を満たすk, l, m, nは，$(k,\ l,\ m,\ n)=(8,\ 0,\ 0,\ 4)$である。

(iv)　$k>m$かつ$l>n$のとき

④より，$2^m3^n(2^{k-m}3^{l-n}+1)=337$となり，337は素数なので，$m=n=0$であり，

$$2^k3^l+1=337\cdots\cdots\cdots⑧$$

(i)と同様に考えると，⑧を満たすk, lは存在しない。

(i)～(iv)より，①を満たすa, b, c, dは$(a,\ b,\ c,\ d)=(k+1,\ l+1,\ m+1,\ n+1)$から，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 5,\ 9,\ 1),\ (9,\ 1,\ 1,\ 5)$$

［解　説］

年度が題材の整数問題で，一橋大で頻出タイプです。a, b, c, dがすべて0でないことの説明が面倒ですが，ここを超えれば素数337から視界が開けてきます。

2

問題のページへ

3 点 O(0, 0)，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，Q$(1,\ 3\sin 2\theta)$に対し，△OPQ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\left|\cos\theta\cdot 3\sin 2\theta-\sin\theta\right|=\frac{1}{2}\left|6\sin\theta\cos^2\theta-\sin\theta\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|6\sin\theta(1-\sin^2\theta)-\sin\theta\right|=\frac{1}{2}\left|-6\sin^3\theta+5\sin\theta\right|$$

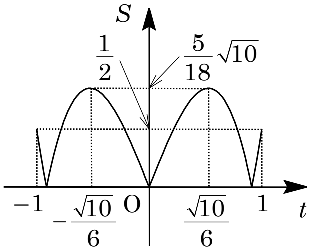
ここで，$t=\sin\theta$，$f(t)=-6t^3+5t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ から $-1\leqq t\leqq 1$ となり,

$$S=\frac{1}{2}\left|f(t)\right|$$

$f'(t)=-18t^2+5$ から，$f'(t)=0$ を満たす解は，$t=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ となり，$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のとおりである。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↘	$-\frac{5}{9}\sqrt{10}$	↗	$\frac{5}{9}\sqrt{10}$	↘	-1

これより，$S=\frac{1}{2}\left|f(t)\right|\ (-1\leqq t\leqq 1)$ のグラフは右図のようになる。



よって，△OPQ の面積の最大値は $\dfrac{5}{18}\sqrt{10}$ である。

［解 説］

三角形の面積を題材にした微分と増減についての基本題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　不等式$|x-y| \leqq x+y$は，$-(x+y) \leqq x-y \leqq x+y$と同値であり，

$$-(x+y) \leqq x-y \Leftrightarrow x \geqq 0\,,\ x-y \leqq x+y \Leftrightarrow y \geqq 0$$

よって，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ と同値である。

(2)　(1)と同様にして，$\left|1+y-2x^2-y^2\right| \leqq 1-y-y^2$ より，

$$-(1-y-y^2) \leqq 1+y-2x^2-y^2 \leqq 1-y-y^2$$

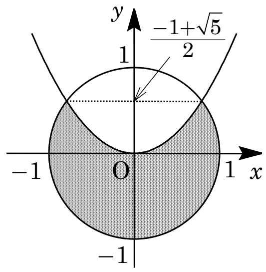
$-(1-y-y^2) \leqq 1+y-2x^2-y^2$ から，$x^2+y^2 \leqq 1$ ………①

$1+y-2x^2-y^2 \leqq 1-y-y^2$ から，$y \leqq x^2$ ………②

ここで，領域①の境界線 $x^2+y^2=1$ と領域②の境界線 $y=x^2$ の共有点は,

$$y+y^2=1\,,\ y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (y \geqq 0)$$

よって，不等式①かつ②を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



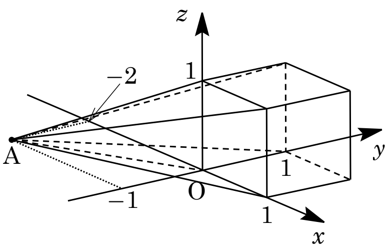
［解　説］

不等式と領域の問題です。ただ，(1)については，上の解答例の同値変形が一般的でしょう。そうすると，(2)は意味が半減してしまいますが……。

4

問題のページへ

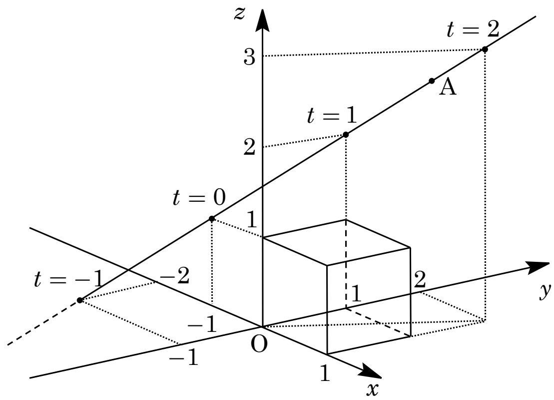
(1) 与えられた 1 辺の長さ 1 の立方体 D の 6 つの面ついて，xy 平面上の面を S_1，その対面を S_2，また xz 平面上の面を S_3，その対面を S_4，さらに yz 平面上の面を S_5，その対面を S_6 とおく。



さて，$t=-1$ のとき点 $\mathrm{A}(-2,\ -1,\ 0)$ となり，また D の内部およびすべての面上を動く点 P に対して，線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_3 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_5 の四角錐」を合わせたものである。このとき，W の体積 $f(-1)$ は,

$$f(-1)=1^3+\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot|-1|+\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot|-2|=2$$

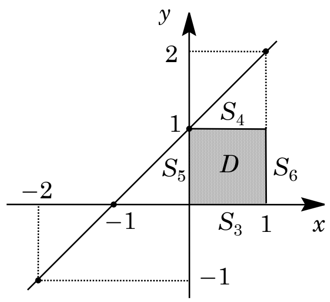
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 0,\ 1)+t(1,\ 1,\ 1)$ から，点 A は，点 $(-1,\ 0,\ 1)$ を通り，方向ベクトル $(1,\ 1,\ 1)$ の直線上を動く。



すると，$t=-1\to 0\to 1\to 2$ のとき，点 A の座標は $(-2,\ -1,\ 0)\to(-1,\ 0,\ 1)\to(0,\ 1,\ 2)\to(1,\ 2,\ 3)$ と変化する。

(i) $t\leqq -1$ のとき

線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_1 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_3 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_5 の四角錐」を合わせたものである。このとき，W の体積 $f(t)$ は,



$$f(t)=1+\frac{1}{3}|t+1|+\frac{1}{3}|t|+\frac{1}{3}|t-1|$$

$$=1-\frac{1}{3}(t+1)-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}(t-1)=-t+1$$

(ii) $-1\leqq t\leqq 0$ のとき

線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_3 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_5 の四角錐」を合わせたものである。このとき，W の体積 $f(t)$ は,

$$f(t)=1+\frac{1}{3}|t|+\frac{1}{3}|t-1|=1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}(t-1)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}$$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_2 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_5 の四角錐」を合わせたものである。このとき，W の体積 $f(t)$ は,

$$f(t)=1+\frac{1}{3}|t+1-1|+\frac{1}{3}|t-1|=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}(t-1)=\frac{4}{3}$$

(iv)　$1 \leqq t \leqq 2$ のとき

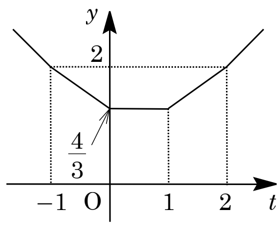
線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_2 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_4 の四角錐」を合わせたものである。このとき, W の体積 $f(t)$ は,

$$f(t) = 1 + \frac{1}{3}\left|t+1-1\right| + \frac{1}{3}\left|t-1\right| = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}(t-1) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}$$

(v)　$t \geqq 2$ のとき

線分 AP の動く範囲 W は,「立方体 D」と「頂点 A で底面 S_2 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_4 の四角錐」と「頂点 A で底面 S_6 の四角錐」を合わせたものである。このとき, W の体積 $f(t)$ は,

$$f(t) = 1 + \frac{1}{3}\left|t+1-1\right| + \frac{1}{3}\left|t-1\right| + \frac{1}{3}\left|t-1-1\right|$$
$$= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{3}(t-2) = t$$



(i)〜(v)より, $y = f(t)$ のグラフは右図のようになる。

すると, $f(t)$ の最小値は $\frac{4}{3}$ である。

［解 説］

空間図形の計量についての問題です。図をもとにして, 場合分けの処理をする点が面倒です。解答例で, 見取り図だけでなく投影図も描いているのは, そのためです。なお, 体積計算は容易です。

5

問題のページへ

(1)　赤玉 2 つと白玉 1 つが入っている箱 A, 赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている箱 B に対し, n 回目に箱 A, 箱 B を選ぶ確率を, それぞれ a_n, b_n とおくと,

$$a_n+b_n=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

まず, 1 回目は箱を無作為に箱を選ぶことより, $a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$

そして, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ。

すると, $n+1$ 回目に箱 A を選ぶのは, n 回目に箱 A を選び赤玉を取り出したとき, または n 回目に箱 B を選び白玉を取り出したときより,

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}(a_n+b_n)=\dfrac{2}{3}$ となり, $n\geqq 2$ で, $a_n=\dfrac{2}{3}$, $b_n=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって, n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n は, $p_1=\dfrac{2}{3}a_1+\dfrac{1}{3}b_1=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$p_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\quad(n\geqq 2)$$

(2)　$a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$ のもとで, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ。

すると, $n+1$ 回目に箱 A を選ぶのは, n 回目に箱 A を選び赤玉を取り出すか, 白玉を取り出し無作為に選んだとき, または n 回目に箱 B を選び白玉を取り出し無作為に選んだときより,

$$a_{n+1}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)a_n+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}b_n=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{3}b_n \cdots\cdots\cdots ③$$

①③より, $a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n+\dfrac{1}{3}(1-a_n)=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}$ となり,

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

これより, $a_n-\dfrac{2}{3}=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ となり,

$$a_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ b_n=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって, n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n は,

$$q_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{2}{3}\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{5}{9}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［解　説］

確率と漸化式の問題です。赤玉を取り出す確率ではなく, 箱を選ぶ確率を設定するところがポイントです。