**1**

解答解説のページへ

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

実数 $x$ に対し，$x$ を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 $n$ に対して，$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $a, b$ を実数とし, 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする。ただし, 重解の場合は $\alpha = \beta$ とする。3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在する $(a,\ b)$ の範囲を求め図示せよ。

(2) 3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在するとき, $\dfrac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$ の値の範囲を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

$k>0$ とする。円 $C$ を $x^2+(y-1)^2=1$ とし，放物線 $S$ を $y=\dfrac{1}{k}x^2$ とする。

(1) $C$ と $S$ が共有点をちょうど 3 個もつときの $k$ の範囲を求めよ。

(2) $k$ が(1)の範囲を動くとき，$C$ と $S$ の共有点のうちで $x$ 座標が正の点を P とする。P における $S$ の接線と $S$ と $y$ 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

**5**

解答解説のページへ

サイコロを 3 回投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx=0$$

となる確率を求めよ。

**1**

問題のページへ

1000 以下の自然数において, 2 の倍数の集合を $A$, 3 の倍数の集合を $B$, 5 の倍数の集合を $C$ とし, その要素の個数を, それぞれ $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ とおくと,

$$n(A)=\left[\frac{1000}{2}\right]=500,\ n(B)=\left[\frac{1000}{3}\right]=333,\ n(C)=\left[\frac{1000}{5}\right]=200$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{1000}{6}\right]=166,\ n(B\cap C)=\left[\frac{1000}{15}\right]=66$$

$$n(C\cap A)=\left[\frac{1000}{10}\right]=100,\ n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1000}{30}\right]=33$$

これより, $n(A\cup B\cup C)=500+333+200-166-66-100+33=734$ となる。

すると, 2, 3, 5 のいずれかの倍数である合成数は, $734-3=731$ 個ある。

次に, 2, 3, 5 のいずれの倍数でもない合成数として, 7 以上の 2 つの素数の積を考える。そこで, $31^2=961<1000$ に注意すると, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 の 8 つの素数の中から重複を許して 2 個選んだとき, その積の個数は,

$$_8\mathrm{H}_2={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times 8}{2}=36$$

したがって, 1000 以下の合成数は, 少なくとも $731+36=767$ 個存在する。

以上より, 1000 以下の素数は, 多くとも $999-767=232$ 個となる。すなわち 250 個以下である。

［解 説］

素数の個数についての問題です。2, 3, 5 の倍数の個数について計算すると, 予測できることですが, これだけでは少し不足します。そこで, この後の詰めとして, 2, 3, 5 の倍数でない 7 の倍数の個数を調べるか, もっと大雑把に 7 以上の素数の積の個数を調べるか, などの方法が考えられます。

**2**

問題のページへ

$l$ を整数として，$l \leqq \sqrt{k} < l+1$ すなわち $l^2 \leqq k < (l+1)^2$ のとき，$[\sqrt{k}] = l$ である。

すると，$a_k = 2^{[\sqrt{k}]}$ から，

$$a_{l^2} = a_{l^2+1} = a_{l^2+2} = \cdots = a_{(l+1)^2-1} = 2^l$$

ここで，$s_l = a_{l^2} + a_{l^2+1} + a_{l^2+2} + \cdots + a_{(l+1)^2-1}$ とおくと，

$$s_l = \{(l+1)^2 - 1 - l^2 + 1\}\cdot 2^l = (2l+1)\cdot 2^l$$

すると，正の整数 $n$ に対して，$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a_k$ より，$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = \sum_{l=1}^{n-1} s_l + 2^n = \sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\cdot 2^l + 2^n \cdots\cdots\cdots①$$

そこで，$t_{n-1} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\cdot 2^l = 3\cdot 2^1 + 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} t_{n-1} - 2t_{n-1} &= 3\cdot 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 6 + 2\cdot\frac{2^2(2^{n-2}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n = 6 + (2^{n+1} - 8) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= -2 - (2n-3)\cdot 2^n \end{aligned}$$

これより，$t_{n-1} = 2 + (2n-3)\cdot 2^n$ となり，①より，

$$b_n = 2 + (2n-3)\cdot 2^n + 2^n = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1} \cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n = 1$ のときも①は成立している。

### ［解 説］

数列の和の問題です。見かけは複雑そうですが，具体的に考えると，内容は群数列の和であることがわかります。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1) $x^2-ax+b=0$ が実数解 $\alpha$, $\beta$ に対して，3 辺の長さが $1$, $\alpha$, $\beta$ である三角形が存在するには，まず $\alpha>0$，$\beta>0$ が必要であり，

$$D=a^2-4b\geqq 0\ \cdots\cdots\text{①},\ \ \alpha+\beta=a>0\ \cdots\cdots\text{②},\ \ \alpha\beta=b>0\ \cdots\cdots\text{③}$$

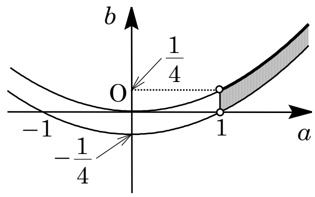
このとき，$|\alpha-\beta|<1<\alpha+\beta$ より，$(\alpha-\beta)^2<1$ かつ $1<\alpha+\beta$ となり，

$$a^2-4b<1\ \cdots\cdots\text{④},\ \ 1<a\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

①④より，$0\leqq a^2-4b<1$ となり，②③⑤と合わせると，

$$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}<b\leqq\frac{1}{4}a^2,\ \ a>1,\ \ b>0$$

よって，$(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は太線の部分のみ含む。

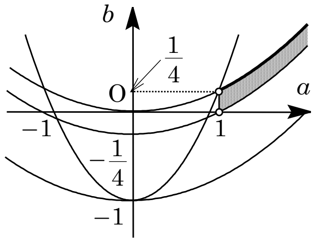



(2) $\dfrac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}=k$ とおくと，②③より，

$$\frac{b+1}{a^2}=k,\ \ b=ka^2-1\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

すると，⑥は頂点が $(0,\ -1)$ の放物線を表す。

まず，放物線 $b=\dfrac{1}{4}a^2$ を $b$ 軸方向に平行移動し，頂点を $(0,\ -1)$ に一致させると，その式は $b=\dfrac{1}{4}a^2-1$ になる。




また，放物線⑥が点 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通るとき，$\dfrac{1}{4}=k-1$ より $k=\dfrac{5}{4}$ である。

したがって，放物線⑥が(1)で求めた網点部と共有点をもつ $k$ の範囲は，図より，

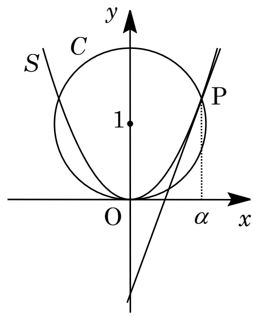
$$\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4},\ \ \frac{1}{4}<\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}<\frac{5}{4}$$

［解 説］

(2)は，(1)で求めた領域と共有点をもつ $k$ の範囲を求めるという方針で，しかも軸が共通した放物線どうしなので，感覚的な記述をしています。やや雑な感じもしますが，気になるようであれば，求めた $k$ の範囲で，放物線⑥が(1)の境界の太線部と交わることを示すという手もあります。

**4**

問題のページへ




(1)　円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と放物線 $S: y=\dfrac{1}{k}x^2$ を連立し,

$$x^2+\left(\frac{1}{k}x^2-1\right)^2=1,\ \frac{1}{k^2}x^4+\left(-\frac{2}{k}+1\right)x^2=0$$

$x^2(x^2-2k+k^2)=0$ となり，$x=0$ または $x^2=2k-k^2$ から，$C$ と $S$ が共有点を 3 個もつ条件は，$k>0$ のもとで,

$$2k-k^2>0,\ k(k-2)<0$$

よって，$0<k<2$ である。

(2)　$0<k<2$ のとき，$C$ と $S$ の共有点は $x=0,\ \pm\sqrt{2k-k^2}$ であり，$\alpha=\sqrt{2k-k^2}$ とおくと，$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{k}\right)$ となる。

さて，点 P における $S$ の接線の方程式は，$y'=\dfrac{2}{k}x$ から,

$$y-\frac{\alpha^2}{k}=\frac{2}{k}\alpha(x-\alpha),\ y=\frac{2}{k}\alpha x-\frac{\alpha^2}{k}$$

すると，P における $S$ の接線と $S$ と $y$ 軸とによって囲まれる領域の面積 $T$ は,

$$T=\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{k}x^2-\frac{2}{k}\alpha x+\frac{\alpha^2}{k}\right)dx=\frac{1}{k}\int_0^{\alpha}(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{3k}\alpha^3=\frac{2k-k^2}{3k}\sqrt{2k-k^2}=\frac{2-k}{3}\sqrt{2k-k^2}=\frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3}$$

そこで，$f(k)=k(2-k)^3=-k(k-2)^3$ とおくと,

$$f'(k)=-1\cdot(k-2)^3-k\cdot3(k-2)^2$$
$$=-(k-2)^2(k-2+3k)$$
$$=-2(k-2)^2(2k-1)$$

| $k$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(k)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $f(k)$ | 0 | ↗ | $\frac{27}{16}$ | ↘ | 0 |

これより，$0<k<2$ における $f(k)$ の増減は右表のようになる。

すると，$T=\dfrac{1}{3}\sqrt{f(k)}$ から，$T$ の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{27}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。

［解　説］

微分と増減についての問題です。(2)では，$f'(k)$ の計算に，知っておいてもよいと思われる積の微分法を利用していますが，普通に計算しても構いません。

## 5

問題のページへ

サイコロの目 $a, b, c$ に対して，$\displaystyle\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx=0$ ……(＊)のとき，

$$\int_{a-3}^{a+3}\{x^2-(b+c)x+bc\}\,dx=\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{b+c}{2}x^2+bcx\Big]_{a-3}^{a+3}$$

$$=\frac{1}{3}\{(a+3)^3-(a-3)^3\}-\frac{b+c}{2}\{(a+3)^2-(a-3)^2\}+bc\{(a+3)-(a-3)\}$$

$$=\frac{1}{3}(18a^2+54)-\frac{b+c}{2}\cdot 12a+bc\cdot 6=6\{a^2-(b+c)a+bc+3\}$$

(＊)より，$a^2-(b+c)a+bc+3=0$ となり，$(a-b)(a-c)=-3$ から，

(i)　$(a-b,\ a-c)=(1,\ -3)$ のとき　$b=a-1$，$c=a+3$ から $a=2,\ 3$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 5)$，$(3,\ 2,\ 6)$

(ii)　$(a-b,\ a-c)=(-3,\ 1)$ のとき　$b=a+3$，$c=a-1$ から $a=2,\ 3$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 1)$，$(3,\ 6,\ 2)$

(iii)　$(a-b,\ a-c)=(-1,\ 3)$ のとき　$b=a+1$，$c=a-3$ から $a=4,\ 5$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 1)$，$(5,\ 6,\ 2)$

(iv)　$(a-b,\ a-c)=(3,\ -1)$ のとき　$b=a-3$，$c=a+1$ から $a=4,\ 5$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 1,\ 5)$，$(5,\ 2,\ 6)$

(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)$ の組は 8 個となるので，(＊)となる確率は $\dfrac{8}{6^3}=\dfrac{1}{27}$ である。

### ［解　説］

確率の基本問題です。条件の定積分(＊)から扱いやすい式が導けます。