1

解答例のページへ

次の問いに答えよ。ただし，log は自然対数を表す。

(1)　$x>0$ で定義された次の関数の最大値を求めよ。　$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$

(2)　次の不定積分をそれぞれ求めよ。　$\displaystyle\int \log x\,dx$，$\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

(3)　(1)で求めた最大値を a として，座標平面上の 2 つの曲線 $C_1: y=a\sqrt{x}$，$C_2: y=\log x$ を考える。x 軸と 2 つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

2

解答例のページへ

$a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を考える。点 P_n，Q_n，R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が以下の 2 つの条件を満たすとする。

(i)　点 P_1 は直線 AB 上にあり，x 座標が p である。

(ii)　自然数 n に対し，

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である。ただし，点 P_n が x 軸上にあるときは，点 Q_n は P_n と同じ点であるとする。
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である。ただし，点 Q_n が直線 AC 上にあるときは，点 R_n は Q_n と同じ点であるとする。
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である。

点 P_n の x 座標を x_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 R_1 の座標を a, p を用いて表せ。

(2)　命題「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」が真であるような a の値の範囲を求めよ。ただし，線分は両端を含むものとする。

(3)　x_n を a, n, p を用いて表せ。

(4)　$a=2$，$p=0$ であるとき，不等式 $|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

3

解答例のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し，座標平面上の原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円上の 4 点 A(1, 0)，B($\cos\theta$, $\sin\theta$)，C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$)，D($\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$) を考え，△OAD の面積を $S(\theta)$，△ABC の面積を $T(\theta)$，△ABD の面積を $U(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}$ を求めよ。

(3) $t=\cos\theta$ とおく。$\dfrac{U(\theta)}{\sin\theta}$ を t の整式で表せ。

(4) 関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\dfrac{T(\theta)}{U(\theta)}$ と定義する。$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}f(\theta)$ を求めよ。また，θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

n を自然数とする。$(3n+1)$ 個の箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} があり，1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して，k 番目の箱 A_k には，1 から k までの整数が 1 つずつ書かれた k 枚のカードが入っている。これを初期状態とする。次の問いに答えよ。

(1)　箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ。

(2)　箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ。

(3)　初期状態から，箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているすべてのカードを箱 B に移す。箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が(2)で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする。$P(n)$ を n を用いて表せ。

(4)　M を(2)で求めた値とする。初期状態から，箱 A_M，A_{M+1}，…，A_{3n+1} だけ集めて，ケース C に収納する。ケース C から 1 つの箱を選び，さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す。カードに書かれた整数が M に等しいとき，そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする。$\lim_{n\to\infty} nQ(n)$ を求めよ。

5

解答例のページへ

i を虚数単位とする。複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$z_1=\sqrt{3}+2i\,,\ \ z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1)　z_2-i と z_3-i を極形式で表せ。

(2)　z_n-i を極形式で，$z_n-i=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ と表したとき，$\log_2 r_n$ を n を用いて表せ。

(3)　z_n を n を用いて表せ。

(4)　複素数 z_n が表す複素数平面上の点を P_n とする。3 点 P_3，P_5，P_{2025} が一直線上にあることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\log x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$

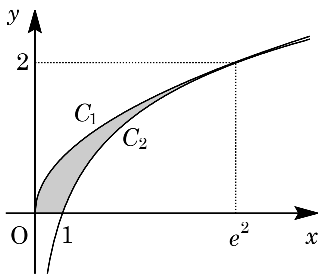
$f'(x)=0$ とすると $\log x=2\ (x=e^2)$ となり，これから $f(x)$ の増減は右上表の通りである。すると，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{2}{e}$ となる。

(2)　$\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x+C$

$$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

(3)　(1)から $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\leqq\dfrac{2}{e}$ なので，$\log x\leqq\dfrac{2}{e}\sqrt{x}$ (等号は $x=e^2$ のとき)となる。

ここで，$C_1: y=\dfrac{2}{e}\sqrt{x}$，$C_2: y=\log x$ と x 軸によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，(2)の結果を用いて，



$$V=\pi\int_0^{e^2}\frac{4}{e^2}x\,dx-\pi\int_1^{e^2}(\log x)^2dx$$

$$=\frac{4}{e^2}\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{e^2}-\pi\Big[x(\log x)^2-2x\log x+2x\Big]_1^{e^2}$$

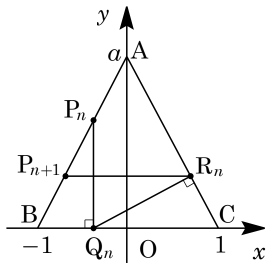
$$=2\pi e^2-\pi(e^2\cdot4-2e^2\cdot2+2e^2-2)=2\pi$$

［コメント］

回転体の体積計算の問題です。(3)において，C_1 と C_2 の位置関係を把握するのに，(1)の結果が役に立っています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$a>0$ のとき，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ に対して，

$$\mathrm{AB}: y=ax+a \cdots\cdots①,\quad \mathrm{AC}: y=-ax+a \cdots\cdots②$$

(1) 与えられた操作を行うと，点 P_1 の x 座標が p から $\mathrm{Q}_1(p,\ 0)$ となり，Q_1 から AC に下ろした垂線の方程式は，

$$y=\frac{1}{a}(x-p) \cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立して，$\dfrac{1}{a}(x-p)=-ax+a$ となり，

$$(a^2+1)x=a^2+p\,,\quad x=\frac{a^2+p}{a^2+1}$$

②から $y=-a\cdot\dfrac{a^2+p}{a^2+1}+a=\dfrac{a-ap}{a^2+1}$ となり，$\mathrm{R}_1\left(\dfrac{a^2+p}{a^2+1},\ \dfrac{a-ap}{a^2+1}\right)$ である。

(2) 命題「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」を数式化すると，「$-1\leqq p\leqq 0$ ならば $0\leqq\dfrac{a^2+p}{a^2+1}\leqq 1$ である」となる。

さて，$-1\leqq p\leqq 0$ から $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\leqq\dfrac{a^2+p}{a^2+1}\leqq\dfrac{a^2}{a^2+1}$ となり，命題が真の条件は，

$$0\leqq\frac{a^2-1}{a^2+1} \cdots\cdots\cdots④,\quad \frac{a^2}{a^2+1}\leqq 1 \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤はつねに成り立ち，④から $0\leqq a^2-1$ で，$a>0$ から $a\geqq 1$ となる。

したがって，求める a の値の範囲は $a\geqq 1$ である。

(3) 点 P_n の x 座標を x_n とすると，(1)と同様にして，$\mathrm{R}_n\left(\dfrac{a^2+x_n}{a^2+1},\ \dfrac{a-ax_n}{a^2+1}\right)$

直線 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は $y=\dfrac{a-ax_n}{a^2+1}$ となり，①と連立すると $\dfrac{a-ax_n}{a^2+1}=ax+a$ から，

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{a-ax_n}{a^2+1}-a\right)=\frac{1-x_n}{a^2+1}-1=-\frac{x_n+a^2}{a^2+1}$$

これより，$x_{n+1}=-\dfrac{x_n+a^2}{a^2+1}=-\dfrac{1}{a^2+1}x_n-\dfrac{a^2}{a^2+1}$ となり，

$$x_{n+1}+\frac{a^2}{a^2+2}=-\frac{1}{a^2+1}\left(x_n+\frac{a^2}{a^2+2}\right)$$

$x_n+\dfrac{a^2}{a^2+2}=\left(x_1+\dfrac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\dfrac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}=\left(p+\dfrac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\dfrac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}$ から，

$$x_n=\left(p+\frac{a^2}{a^2+2}\right)\left(-\frac{1}{a^2+1}\right)^{n-1}-\frac{a^2}{a^2+2} \cdots\cdots\cdots⑥$$

(4) $a=2$，$p=0$ のとき，⑥から，$x_n=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}-\dfrac{2}{3}$ となり，

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}(1+5)=4\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$$

ここで，$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}$ から $4\left|\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right|<10^{-10}$ となり，$\dfrac{4}{5^n}<10^{-10}$ より，

$$5^n>4\cdot10^{10},\ \log_{10}5^n>\log_{10}(4\cdot10^{10}),\ n\log_{10}5>\log_{10}4+10$$

$\log_{10}2=0.3010$ より $n(1-\log_{10}2)>2\log_{10}2+10$ と変形して，

$$n>\frac{0.6020+10}{1-0.3010}=\frac{10.602}{0.699}\fallingdotseq15.2$$

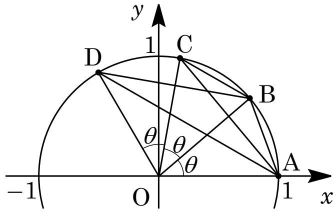
以上より，求める最小の自然数 n は $n=16$ である。

［コメント］

数列の図形への応用問題です。誘導に従えば，計算ミスに注意するだけです。

3

問題のページへ



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき，4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，$\mathrm{D}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ に対し，$\triangle\mathrm{OAD}$ の面積を $S(\theta)$ とおくと，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 3\theta=\frac{1}{2}\sin 3\theta$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin 3\theta}{2\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3\theta}{3\theta}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $T(\theta)$ とおくと，

$$T(\theta)=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}-\triangle\mathrm{OAC}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta$$

$$=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}=1^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(3)　$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を $U(\theta)$ とおくと，

$$U(\theta)=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBD}-\triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 3\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\sin\theta+4\sin^3\theta)=\sin\theta(2\sin^2\theta+\cos\theta-1)$$

$$=\sin\theta(-2\cos^2\theta+\cos\theta+1)$$

これより，$t=\cos\theta$ とおくと，$\dfrac{U(\theta)}{\sin\theta}=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1=-2t^2+t+1$ となる。

(4)　(2)(3)から，$f(\theta)=\dfrac{T(\theta)}{U(\theta)}=\dfrac{T(\theta)}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{U(\theta)}=\dfrac{1-t}{-2t^2+t+1}=\dfrac{t-1}{2t^2-t-1}$

ここで，$\theta\to+0$ のとき $t\to 1-0$ となり，

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=\lim_{t\to1-0}\frac{t-1}{2t^2-t-1}=\lim_{t\to1-0}\frac{t-1}{(2t+1)(t-1)}=\lim_{t\to1-0}\frac{1}{2t+1}=\frac{1}{3}$$

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\dfrac{1}{2}<t<1$ となることより，$f(\theta)=\dfrac{1}{2t+1}$ のとり得る値の範囲は，$\dfrac{1}{3}<f(\theta)<\dfrac{1}{2}$ である。

［コメント］

頂点が単位円周上にある三角形の面積を題材にした極限の問題です。三角関数についての計算力が問われています。

4

問題のページへ

箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} があり，箱 A_k $(1 \leqq k \leqq 3n+1)$ には 1 から k までの整数が書かれた k 枚のカードが入っている。

(1) 箱 A_{3n+1} には 1 から $3n+1$ までの整数が書かれた $3n+1$ 枚のカードが入っており，カードに書かれた整数の平均値 L は,

$$L=\frac{1+2+\cdots+(3n+1)}{3n+1}=\frac{1}{3n+1}\cdot\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)=\frac{3n+2}{2}$$

(2) 箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているカードの枚数は,

$$1+2+\cdots+(3n+1)=\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)$$

箱 A_k に入っているカードに書かれた整数の和は，$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ から，箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているカードに書かれた整数の総和は,

$$\sum_{k=1}^{3n+1}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3n+1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}(3n+1)(3n+2)(3n+3)=\frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2)$$

よって，箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているカードに書かれた整数の平均値 M は,

$$M=\frac{\frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2)}{\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)}=n+1$$

(3) 箱 A_1，A_2，…，A_{3n+1} に入っているすべてのカードを移した箱 B には，(2)からカードが全部で $\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)$ 枚入っている。

その中に，$M=n+1$ のカードは，移す前に箱 A_{n+1}，A_{n+2}，…，A_{3n+1} に 1 枚ずつ入っていたものなので，$(3n+1)-(n+1)+1=2n+1$ 枚ある。

これより，箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が M に等しくなる確率 $P(n)$ は,

$$P(n)=\frac{2n+1}{\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)}=\frac{2(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$$

(4) 箱 A_{n+1}，A_{n+2}，…，A_{3n+1} だけ集めて収納したケース C には，箱が全部で $(3n+1)-(n+1)+1=2n+1$ 個入っている。

ここで，ケース C から箱 A_l $(n+1 \leqq l \leqq 3n+1)$ を選び，l 枚のカードが入っているその箱から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が $M=n+1$ である確率は，$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{l}$ である。すると，ケース C から 1 つの箱を選び，その箱から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が M に等しい確率は,

$$\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{l}=\frac{1}{2n+1}\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}$$

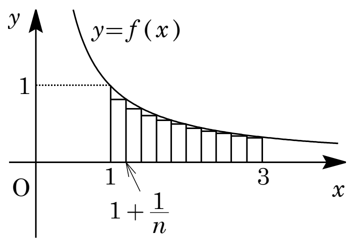
また，ケース C から箱 A_{3n+1} を選び，その箱から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が M に等しい確率は，$\dfrac{1}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{3n+1}$ である。

したがって，ケース C から 1 つの箱を選び，その箱から 1 枚のカードを取り出す場合，カードに書かれた整数が M に等しいとき，そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率 $Q(n)$ は，

$$Q(n)=\frac{\dfrac{1}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{3n+1}}{\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}}=\frac{1}{3n+1}\cdot\frac{1}{\displaystyle\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}},\quad nQ(n)=\frac{n}{3n+1}\cdot\frac{1}{\displaystyle\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}}$$

さて，$\displaystyle\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}$ より，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}&=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{3n}\right)+\frac{1}{3n+1}\\&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}}\right)+\frac{1}{3n+1}\\&=\frac{1}{n}\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)+f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(3)\right\}+\frac{1}{3n+1}\\&\to\int_1^3 f(x)dx+0=\Big[\log|x|\Big]_1^3=\log 3\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$



以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nQ(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\displaystyle\sum_{l=n+1}^{3n+1}\frac{1}{l}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log 3}=\frac{1}{3\log 3}$ である。

［コメント］

問題文の読解力が要求される確率問題です。(1)～(3)は正確に計算を進めるだけですが，(4)では区分求積法も絡んできます。そのため，ずいぶん時間を費やします。

5

問題のページへ

(1)　$z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，$z_{n+1}-i=2(z_n-i)^2$ ……①となり，

$z_1=\sqrt{3}+2i$ から $z_1-i=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$……②なので，①から，

$$z_2-i=2(z_1-i)^2=2\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3-i=2(z_2-i)^2=2\left\{8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2=128\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

(2)　$z_n-i=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ とすると，①より，

$$r_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i\sin\theta_{n+1})=2\{r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\}^2=2r_n^2(\cos 2\theta_n+i\sin 2\theta_n)$$

すると，$r_{n+1}=2r_n^2$ から $\log_2 r_{n+1}=\log_2 2r_n^2$ となり，$\log_2 r_{n+1}=\log_2 2+\log_2 r_n^2$

$$\log_2 r_{n+1}=1+2\log_2 r_n$$

$\log_2 r_{n+1}+1=2(\log_2 r_n+1)$ と変形して，②から $r_1=2$ なので，

$$\log_2 r_n+1=(\log_2 r_1+1)\cdot 2^{n-1}=(1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$$

したがって，$\log_2 r_n=2^n-1$ である。

(3)　(2)より $r_n=2^{2^n-1}$ となり，また②から $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$ で，$\theta_{n+1}=2\theta_n$ より，

$$\theta_n=\theta_1\cdot 2^{n-1}=\frac{\pi}{6}\cdot 2^{n-1}=\frac{2^{n-2}}{3}\pi$$

すると，$z_n-i=2^{2^n-1}\left(\cos\dfrac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\dfrac{2^{n-2}}{3}\pi\right)$……③となり，

$$z_n=2^{2^n-1}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)+i$$

(4)　複素数平面上で点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ とするとき，$\mathrm{P}_3(z_3)$，$\mathrm{P}_5(z_5)$，$\mathrm{P}_{2025}(z_{2025})$ に対して，$\mathrm{Q}_3(z_3-i)$，$\mathrm{Q}_5(z_5-i)$，$\mathrm{Q}_{2025}(z_{2025}-i)$ とおくと，③から，

$$\arg(z_3-i)=\theta_3=\frac{2^{3-2}}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi,\quad \arg(z_5-i)=\theta_5=\frac{2^{5-2}}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi=2\pi+\frac{2}{3}\pi$$

$$\arg(z_{2025}-i)=\theta_{2025}=\frac{2^{2025-2}}{3}\pi=\frac{2^{2023}}{3}\pi\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，mod 6 で，$2^1\equiv 2$，$2^2\equiv 4$，$2^3\equiv 8\equiv 2$，$2^4\equiv 4$，…となり，帰納的に，n が奇数のとき $2^n\equiv 2$，n が偶数のとき $2^n\equiv 4$ である。

これより，k を自然数として，$2^{2023}=6k+2$ と表すことができ，④から，

$$\frac{2^{2023}}{3}\pi=\frac{6k+2}{3}\pi=2k\pi+\frac{2}{3}\pi$$

したがって，z_3-i，z_5-i，$z_{2025}-i$ の偏角はすべて $\dfrac{2}{3}\pi$ となり，3 点 Q_3，Q_5，Q_{2025} は一直線上にある。

すると，点 P_3，P_5，P_{2025} は，点 Q_3，Q_5，Q_{2025} を，それぞれ虚軸の正の向きに 1 だけ平行移動した点であるので，3 点 P_3，P_5，P_{2025} も一直線上にある。

［コメント］

複素数平面上の点列を対象とした問題です。(3)までは誘導に沿って計算していけばよいのですが，最後の(4)で，整数の性質についての考察が突然現れます。