

1

[解答例のページへ](#)

1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に a_1 , a_2 , a_3 とする。次の問いに答えよ。

- (1) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ が集合 $\{2, 5, 6\}$ と等しくなる確率を求めよ。
- (2) $a_1 < a_2 < a_3$ である確率を求めよ。
- (3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なる確率を求めよ。
- (4) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ と集合 $\{2, 3\}$ が等しいとき、 $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ である条件付き確率を求めよ。
- (5) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$ である確率を求めよ。

2[解答例のページへ](#)

$t > 0$ とする。また、 a, b を実数とし、2 つの関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$, $g(x) = x^2 + ax + b$ を考える。座標平面上の 2 つの曲線 $C_1 : y = f(x)$, $C_2 : y = g(x)$ は x 座標が t である共有点 P をもち、かつ点 P において共通の接線をもつとする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) a, b をそれぞれ t を用いて表せ。
- (3) $t > 0$ における関数 $F(t) = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\} dx$ の最小値を求めよ。

3

解答例のページへ

$a > 0$ とし, p を実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を考える。点 P_n , Q_n , R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が以下の 2 つの条件を満たすとする。

- (i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり, x 座標が p である。
- (ii) 自然数 n に対し,
 - ・点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である。ただし, 点 P_n が x 軸上にあるときは, 点 Q_n は P_n と同じ点であるとする。
 - ・点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である。ただし, 点 Q_n が直線 AC 上にあるときは, 点 R_n は Q_n と同じ点であるとする。
 - ・点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である。

点 P_n の x 座標を x_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 R_1 の座標を a, p を用いて表せ。
- (2) 命題「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば, 点 R_1 は線分 AC 上にある」が真であるような a の値の範囲を求めよ。ただし, 線分は両端を含むものとする。
- (3) x_n を a, n, p を用いて表せ。
- (4) $a = 2$, $p = 0$ であるとき, 不等式 $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

4

解答例のページへ

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。 $O(0, 0)$ を原点とする座標平面上の 2 点 $A(\cos \theta, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ に対して、点 C および点 D を以下の条件により定める。

- (i) D は線分 OB 上の点である。
- (ii) C は直線 OB に関して A と異なる側にある。
- (iii) $\triangle OAB$ と $\triangle CDB$ は合同である。すなわち、 $OA = CD$, $AB = DB$, $BO = BC$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OD}$ を θ を用いて成分表示せよ。
- (2) $\overrightarrow{DC}$ を θ を用いて成分表示せよ。
- (3) C の y 座標を $f(\theta)$ とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) $\angle AOC = \frac{3}{4}\pi$ となるとき、 θ の値を求めよ。

1

問題のページへ

さいころを 3 回投げ、出た目を順に a_1, a_2, a_3 とする。

(1) $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 5, 6\}$ となるのは、 (a_1, a_2, a_3) の決め方が 3! 通りより、その確率は $\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}$ である。

(2) $a_1 < a_2 < a_3$ であるのは、1 以上 6 以下の数から異なる 3 数を選び、小さい数から順に a_1, a_2, a_3 を対応させると考えると、 ${}_6C_3 = 20$ 通りとなる。これより、その確率は $\frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$ である。

(3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なるのは、1 以上 6 以下の数から異なる 3 数を選び、 a_1, a_2, a_3 を対応させると考えると、 ${}_6P_3 = 120$ 通りとなる。これより、その確率は $\frac{120}{6^3} = \frac{5}{9}$ である。

(4) $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3\}$ となる (a_1, a_2, a_3) について、

・ 2 が 2 個で 3 が 1 個のとき ${}_3C_2 = 3$ 通りの場合がある。

・ 2 が 1 個で 3 が 2 個のとき ${}_3C_1 = 3$ 通りの場合がある。

したがって、 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3\}$ となる確率は $\frac{3+3}{6^3} = \frac{6}{6^3}$ である。

また、 $(a_1, a_2, a_3) = (3, 2, 3)$ である確率は $\frac{1}{6^3}$ である。

これより、 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3\}$ のとき $(a_1, a_2, a_3) = (3, 2, 3)$ である条件付き確率は、 $\frac{1}{6^3} \div \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6}$ となる。

(5) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1 \cdots \cdots (*)$ を満たす (a_1, a_2, a_3) に対して、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$

とすると、 $1 \geq \frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_3} \geq \frac{1}{6}$ となり、 $(*)$ から、

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_1}$$

これより、 $a_1 \leq 3$ なので、 $a_1 = 1, 2, 3$ となる。

(i) $a_1 = 1$ のとき $(*)$ から $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 0$ となり、 (a_2, a_3) は存在しない。

(ii) $a_1 = 2$ のとき $(*)$ から $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$ となり、 $a_2 a_3 - 2a_2 - 2a_3 = 0$ から、

$$(a_2 - 2)(a_3 - 2) = 4$$

$2 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$ から、 $(a_2 - 2, a_3 - 2) = (1, 4), (2, 2)$ となり、

$$(a_2, a_3) = (3, 6), (4, 4)$$

(iii) $a_1 = 3$ のとき $(*)$ から $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$ となり、 $2a_2 a_3 - 3a_2 - 3a_3 = 0$ から、

$$4a_2 a_3 - 6a_2 - 6a_3 = 0, (2a_2 - 3)(2a_3 - 3) = 9$$

$3 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$ から, $(2a_2 - 3, 2a_3 - 3) = (3, 3)$ となり,

$$(a_2, a_3) = (3, 3)$$

(i)～(iii)より, $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$ のとき, $(*)$ を満たす (a_1, a_2, a_3) は,

$$(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

したがって, a_1, a_2, a_3 のすべての大小関係を考えると, $(*)$ を満たす確率は,

$$\frac{3! + 3 + 1}{6^3} = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

[コメント]

(4)までは, 確率の基本題が続きます。ただ, (5)は, 実質的には有名な不定方程式を解く設問で, その1つの解法を記しています。

2

問題のページへ

- (1)
- $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$
- に対して,

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

 $f(x)$ の増減は右表のようになり, $x=0$ の
とき極大値 4, $x=-2$ のとき極小値 0 をとる。

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

- (2)
- $g(x) = x^2 + ax + b$
- に対して, 曲線
- $C_1: y = f(x)$
- と曲線
- $C_2: y = g(x)$
- が,
- $x=t>0$
- で接しているとき,

$$f(t) = g(t) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad f'(t) = g'(t) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } -t^3 - 3t^2 + 4 = t^2 + at + b \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } -3t^2 - 6t = 2t + a \cdots \cdots \textcircled{4}$$

 $\textcircled{4}$ から, $a = -3t^2 - 8t$ となり, $\textcircled{3}$ に代入すると,

$$b = -t^3 - 3t^2 + 4 - t^2 - (-3t^2 - 8t)t = 2t^3 + 4t^2 + 4$$

- (3)
- $\textcircled{2}$
- より,
- $g(x) = x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2 + 4$
- となり,

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2 + 4 - (-x^3 - 3x^2 + 4) \\ &= x^3 + 4x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2 \end{aligned}$$

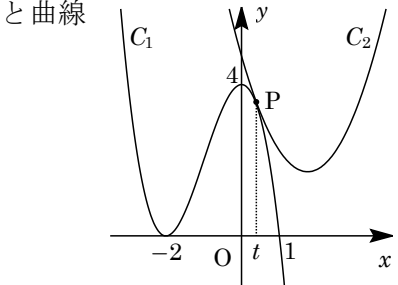
 ここで, $t>0$ のとき, $F(t) = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\} dx$ から,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^1 \{x^3 + 4x^2 - (3t^2 + 8t)x + 2t^3 + 4t^2\} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3t^2 + 8t}{2}x^2 + (2t^3 + 4t^2)x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3t^2 + 8t}{2} + 2t^3 + 4t^2 = 2t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t + \frac{19}{12} \end{aligned}$$

$$F'(t) = 6t^2 + 5t - 4 = (2t-1)(3t+4)$$

 これより, $t>0$ において, $F(t)$ の増減は右表のようになり, $F(t)$ の最小値は,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} - 2 + \frac{19}{12} = \frac{11}{24}$$



t	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$F'(t)$		-	0	+
$F(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

[コメント]

計算力が問われる微積分の総合問題です。

3

問題のページへ

 $a > 0$ のとき、点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ に対して、

$$AB: y = ax + a \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad AC: y = -ax + a \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(1) 与えられた操作を行うと、点 P_1 の x 座標が p から $Q_1(p, 0)$ となり、 Q_1 から AC に下ろした垂線の方程式は、

$$y = \frac{1}{a}(x - p) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②③を連立して、 $\frac{1}{a}(x - p) = -ax + a$ となり、

$$(a^2 + 1)x = a^2 + p, \quad x = \frac{a^2 + p}{a^2 + 1}$$

②から $y = -a \cdot \frac{a^2 + p}{a^2 + 1} + a = \frac{a - ap}{a^2 + 1}$ となり、 $R_1\left(\frac{a^2 + p}{a^2 + 1}, \frac{a - ap}{a^2 + 1}\right)$ である。(2) 命題「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば、点 R_1 は線分 AC 上にある」を数式化すると、「 $-1 \leq p \leq 0$ ならば $0 \leq \frac{a^2 + p}{a^2 + 1} \leq 1$ である」となる。さて、 $-1 \leq p \leq 0$ から $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \leq \frac{a^2 + p}{a^2 + 1} \leq \frac{a^2}{a^2 + 1}$ となり、命題が真の条件は、

$$0 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \frac{a^2}{a^2 + 1} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

⑤はつねに成り立ち、④から $0 \leq a^2 - 1$ で、 $a > 0$ から $a \geq 1$ となる。したがって、求める a の値の範囲は $a \geq 1$ である。(3) 点 P_n の x 座標を x_n とすると、(1)と同様にして、 $R_n\left(\frac{a^2 + x_n}{a^2 + 1}, \frac{a - ax_n}{a^2 + 1}\right)$ 直線 $R_n P_{n+1}$ は $y = \frac{a - ax_n}{a^2 + 1}$ となり、①と連立すると $\frac{a - ax_n}{a^2 + 1} = ax + a$ から、

$$x = \frac{1}{a}\left(\frac{a - ax_n}{a^2 + 1} - a\right) = \frac{1 - x_n}{a^2 + 1} - 1 = -\frac{x_n + a^2}{a^2 + 1}$$

これより、 $x_{n+1} = -\frac{x_n + a^2}{a^2 + 1} = -\frac{1}{a^2 + 1}x_n - \frac{a^2}{a^2 + 1}$ となり、

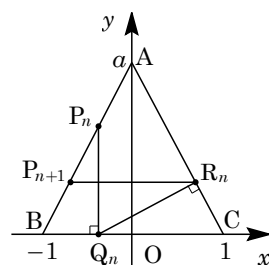
$$x_{n+1} + \frac{a^2}{a^2 + 2} = -\frac{1}{a^2 + 1}\left(x_n + \frac{a^2}{a^2 + 2}\right)$$

 $x_n + \frac{a^2}{a^2 + 2} = \left(x_1 + \frac{a^2}{a^2 + 2}\right)\left(-\frac{1}{a^2 + 1}\right)^{n-1} = \left(p + \frac{a^2}{a^2 + 2}\right)\left(-\frac{1}{a^2 + 1}\right)^{n-1}$ から、

$$x_n = \left(p + \frac{a^2}{a^2 + 2}\right)\left(-\frac{1}{a^2 + 1}\right)^{n-1} - \frac{a^2}{a^2 + 2} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

(4) $a = 2$, $p = 0$ のとき、⑥から、 $x_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}$ となり、

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n (1 + 5) = 4\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$



ここで、 $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$ から $4\left|-\frac{1}{5}\right|^n < 10^{-10}$ となり、 $\frac{4}{5^n} < 10^{-10}$ より、

$$5^n > 4 \cdot 10^{10}, \log_{10} 5^n > \log_{10}(4 \cdot 10^{10}), n \log_{10} 5 > \log_{10} 4 + 10$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ より $n(1 - \log_{10} 2) > 2 \log_{10} 2 + 10$ と変形して、

$$n > \frac{0.6020 + 10}{1 - 0.3010} = \frac{10.602}{0.699} \doteq 15.2$$

以上より、求める最小の自然数 n は $n = 16$ である。

[コメント]

数列の図形への応用問題です。誘導に従えば、計算ミスに注意するだけです。

4

問題のページへ

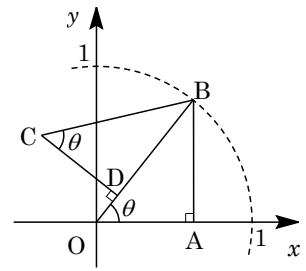
- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $A(\cos \theta, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ に対し,

$\triangle OAB \equiv \triangle CDB$ から, $DB = AB = \sin \theta$ となり,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DB} = 1 - \sin \theta$$

これより, $\overrightarrow{OD} = (1 - \sin \theta)\overrightarrow{OB}$ となり,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= (1 - \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= (\cos \theta - \sin \theta \cos \theta, \sin \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$



- (2) $CD = OA = \cos \theta$ で, $\overrightarrow{DC}$ と x 軸の正の向きとのなす角は $\theta + \frac{\pi}{2}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= (\cos \theta) \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = (\cos \theta)(-\sin \theta, \cos \theta) \\ &= (-\sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta)\end{aligned}$$

- (3) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = (\cos \theta - \sin \theta \cos \theta, \sin \theta - \sin^2 \theta) + (-\sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta)$
 $= (\cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta, \sin \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \cdots \cdots (*)$

C の y 座標を $f(\theta)$ とすると,

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \sin \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin \theta - \sin^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta = -2\sin^2 \theta + \sin \theta + 1 \\ &= -2 \left(\sin \theta - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{8}\end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $0 < \sin \theta < 1$ となるので, $0 < f(\theta) \leq \frac{9}{8}$ である。

- (4) (*) から, $\overrightarrow{OC} = (\cos \theta - \sin 2\theta, \sin \theta + \cos 2\theta)$ となり, $\angle AOC = \frac{3}{4}\pi$ から,

$$\tan \angle AOC = \frac{\sin \theta + \cos 2\theta}{\cos \theta - \sin 2\theta} = -1$$

すると, $\sin \theta + \cos 2\theta = \sin 2\theta - \cos \theta$ から, $\cos 2\theta + \cos \theta = \sin 2\theta - \sin \theta$ となり,

$$2\cos \frac{3}{2}\theta \cos \frac{\theta}{2} = 2\cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2}, \quad \cos \frac{3}{2}\theta \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) = 0$$

- (i) $\cos \frac{3}{2}\theta = 0$ のとき $0 < \frac{3}{2}\theta < \frac{3}{4}\pi$ から, $\frac{3}{2}\theta = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$

- (ii) $\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} = 0$ のとき $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ から $\sin \frac{\theta}{2} < \cos \frac{\theta}{2}$ となり, 成立しない。

- (i)(ii) より, 求める θ の値は $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。

[コメント]

平面ベクトルの応用問題です。問題文が非常に丁寧に記述されています。なお, (3) は(4)へのストレートな誘導ではありませんでした。