1

解答解説のページへ

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

(1)　$X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ。

(2)　X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3)　X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4)　X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, d を実数とし，数列$\{a_n\}$を初項 a, 公差 d の等差数列とする。数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$a_3 = S_2 = 18$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a, d の値を求めよ。

(2) S_n を n を用いて表せ。

(3) 数列$\{S_n\}$の初項から第 n 項までの和を T_n とし，数列$\{U_n\}$を

$$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。U_n が最小となるときの n の値をすべて求め，さらにそのときの U_n の値を求めよ。

(4) (3)で定めた数列$\{U_n\}$の初項から第 7 項までの和を V とする。c を実数とし，関数 $f(x) = 3x^2 + cx + 36$ を考える。定積分 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ が V に等しいとき，c の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ。

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする。また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle$AGH の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle$AGH の面積を求めよ。必要ならば，$\triangle$AGH の面積 S について，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2}$ が成り立つことを用いてよい。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a<0$, $b>0$, $c>0$ とし, 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = ax(x-2),\ \ C_2 : y = b(x+c)^2$$

を考える。放物線 C_1 上の点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは -2 である。放物線 C_1 と放物線 C_2 の共有点が 1 点のみであるとし, その共有点の x 座標を d とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) b, d を c を用いて表せ。

(3) 放物線 C_1 と x 軸で囲まれた部分を A とし, 不等式 $0 \leqq x \leqq d$ の表す領域を B とする。A と B の共通部分の面積 S を c を用いて表せ。

(4) 放物線 C_2, x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 T を c を用いて表せ。

(5) (3)の S と(4)の T が $8S=15T$ を満たすとき, c の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $N \geqq 4$ のとき, 1 から N までの番号の書かれた N 枚のカードが入っている箱から, 1 枚取り出してはもとに戻すという試行を 4 回行うと, N^4 通りの場合が同様に確からしい。そして, 取り出したカードの番号を, 順に X, Y, Z, W とする。

$X=Y=Z=W$ となるのは N 通りの場合があり, この確率は $\dfrac{N}{N^4}=\dfrac{1}{N^3}$ となる。

(2) X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなるのは ${}_N\mathrm{P}_4$ 通りの場合があり, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{P}_4}{N^4}=\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N^4}=\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}$$

(3) X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号であるのは, 1 から N までから 2 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 3 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 を選び $X=Y=Z$ と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!$ 通りの場合があるので, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times 2!}{N^4}=\frac{4N(N-1)}{N^4}=\frac{4(N-1)}{N^3}$$

(4) X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなるのは, 1 から N までから 3 つの異なる番号を選び, X, Y, Z, W を 2 つと 1 つと 1 つに分けて, たとえば 1 と 2 と 3 を選び $X=Y$ と Z と W に分け両者を対応させると考えると, ${}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!$ 通りの場合があるので, この確率は,

$$\frac{{}_N\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 3!}{N^4}=\frac{6N(N-1)(N-2)}{N^4}=\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)と(4)は, 解答例に触れているように, 具体例を考えて場合の数を計算しています。

2

問題のページへ

(1)　初項 a, 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$，その初項から第 n 項までの和 S_n に対して,

$$a_3 = S_2 = 18$$

すると，$a+2d = a+(a+d) = 18$ より，$a = d = 6$ である。

(2)　(1)より，$a_n = 6+(n-1)\cdot 6 = 6n$ となり，$S_n = \dfrac{6+6n}{2}\cdot n = 3n(n+1)$

(3)　数列 $\{S_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n に対して,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} 3k(k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

ここで，$U_n = T_n - 4S_n + 5a_n = n(n+1)(n+2) - 12n(n+1) + 30n$ とすると,

$$U_n = n\{(n^2+3n+2)-12(n+1)+30\} = n(n^2-9n+20) = n(n-4)(n-5)$$

すると，$U_{n+1} = (n+1)(n-3)(n-4)$ となり,

$$U_{n+1} - U_n = (n-4)\{(n+1)(n-3)-n(n-5)\} = 3(n-1)(n-4)$$

これより，$n=1$ のとき $U_n = U_{n+1}$，$2 \leqq n \leqq 3$ のとき $U_n > U_{n+1}$，$n=4$ のとき $U_n = U_{n+1}$，$n \geqq 5$ のとき $U_n < U_{n+1}$ となるので,

$$U_1 = U_2 > U_3 > U_4 = U_5 < U_6 < U_7 < \cdots\cdots$$

よって，$n = 4,\ 5$ のとき U_n は最小となり，最小値は 0 である。

(4)　$V = \displaystyle\sum_{k=1}^{7} U_k = 12+12+6+0+0+12+42 = 84$

また，$f(x) = 3x^2 + cx + 36$ に対して，$I = \displaystyle\int_0^c f(x)\,dx$ とおくと,

$$I = \int_0^c (3x^2+cx+36)\,dx = \Big[\,x^3 + \frac{c}{2}x^2 + 36x\,\Big]_0^c = \frac{3}{2}c^3 + 36c$$

$I = V$ から $\dfrac{3}{2}c^3 + 36c = 84$ となり，$c^3 + 24c - 56 = 0$，$(c-2)(c^2+2c+28) = 0$

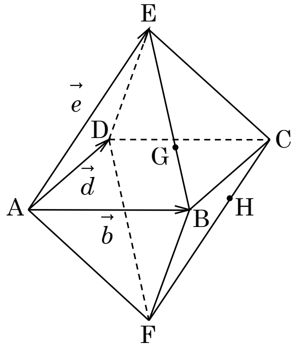
c は実数より，$c = 2$ である。

［解 説］

数列の標準題です。(3)は T_n は階差数列を作るという有名な方法で求めています。また，U_n は因数分解できましたので，階差を考えて処理しています。なお，(4)の V は直接計算した方が早いのではないかと思い……。

3

問題のページへ



(1) 1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF に対して，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくと，

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=1\cdot1\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{d}\cdot\vec{e}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

(2) 条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ ……①であり，右図から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{e}\text{ ……②}$$

$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ は 1 次独立なので，①②から，

$$p=q=1,\ r=-1$$

(3) 辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{e})$

辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\frac{1}{3^2}|2\vec{b}+\vec{e}|^2=\frac{1}{9}\left(4\cdot1^2+4\cdot\frac{1}{2}+1^2\right)=\frac{7}{9}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=|\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e}|^2=1^2+1^2+t^2\cdot1^2+2\cdot0-2t\cdot\frac{1}{2}-2t\cdot\frac{1}{2}=t^2-2t+2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{e})\cdot(\vec{b}+\vec{d}-t\vec{e})=\frac{1}{3}\left(2\cdot1^2+2\cdot0-2t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\cdot1^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(-2t+3)$$

ここで，$\triangle$AGH の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}(t^2-2t+2)-\frac{1}{9}(-2t+3)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3t^2-2t+5}=\frac{1}{6}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}}$$

$0<t<1$ より，$t=\frac{1}{3}$ のとき S は最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{18}$ をとる。

［解　説］

空間ベクトルの基本題です。複雑な計算もありません。

4

問題のページへ

(1) $a<0$，$b>0$，$c>0$ で，$C_1 : y=ax(x-2)$ ……①，$C_2 : y=b(x+c)^2$ ……②

①より $y'=2ax-2a$ となり，C_1 上の点 $(2,\ 0)$ における接線の傾きは -2 より，

$$2a\cdot 2-2a=-2,\ a=-1$$

(2) (1)より $C_1 : y=-x(x-2)$ ……③となり，②③から $b(x+c)^2=-x(x-2)$

$$(b+1)x^2+2(bc-1)x+bc^2=0 \text{ ………④}$$

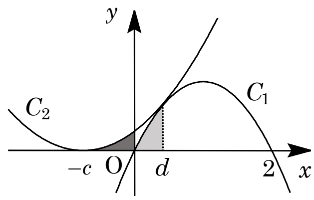
C_1 と C_2 の共有点が 1 点のみで $b>0$ より，④は重解をもち，

$$D/4=(bc-1)^2-bc^2(b+1)=0,\ (-c^2-2c)b+1=0$$

$c>0$ から $b=\dfrac{1}{c^2+2c}$ となり $b>0$ を満たし，④の重解は $x=-\dfrac{bc-1}{b+1}$ なので，

$$d=-\frac{bc-1}{b+1}=-\Big(\frac{c}{c^2+2c}-1\Big)\div\Big(\frac{1}{c^2+2c}+1\Big)=-\frac{-c^2-c}{c^2+2c+1}=\frac{c}{c+1}$$

(3) C_1 と x 軸で囲まれた $0\leqq x\leqq d$ の部分の面積 S は，



$$S=\int_0^d(-x^2+2x)dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^d$$
$$=-\frac{d^3}{3}+d^2=\frac{d^2}{3}(-d+3)$$
$$=\frac{c^2}{3(c+1)^2}\Big(-\frac{c}{c+1}+3\Big)=\frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}$$

(4) C_2 と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積 T は，

$$T=\int_{-c}^0 b(x+c)^2dx=\Big[\frac{b}{3}(x+c)^3\Big]_{-c}^0=\frac{b}{3}c^3=\frac{c^3}{3(c^2+2c)}=\frac{c^2}{3(c+2)}$$

(5) $8S=15T$ より，$\dfrac{8c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}=\dfrac{15c^2}{3(c+2)}$ となり，$8(2c+3)(c+2)=15(c+1)^3$

$$8(2c^2+7c+6)=15(c^3+3c^2+3c+1),\ 15c^3+29c^2-11c-33=0$$

すると，$(c-1)(15c^2+44c+33)=0$ となり，$c>0$ より $c=1$ である。

［解　説］

放物線を題材にした微積分の総合問題です。計算量は少しありますが，内容は基本的です。