1

解答解説のページへ

座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2$ を C とする。また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。

(2)　a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　C と L_a がちょうど 3 つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　a を t を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を整数とする。また，整数の数列$\{c_n\}$を$c_1=a$，$c_2=b$および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a=39$，$b=13$とする。このとき，2つの整数c_5とc_6の最大公約数を求めよ。

(2)　a と b はともに奇数であるとする。このとき，自然数 n に対して次の命題P_nが成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ。

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である。

(3)　d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする。このとき，自然数 n に対してc_nが d の倍数になることを示せ。ただし，数学的帰納法を用いて証明すること。

(4)　c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ も奇数であることを示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が$(n+5)$個，合計で$(n+8)$個の玉が入っている。また，空箱 A, B, C, D, E, F が用意されている。この準備の下で試行 1, 試行 2 を順に行う。

試行 1　袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉ならば $i=0$，赤玉ならば$i=1$とおく。

試行 2　次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は$(3-i)$個，白玉は$(4+i)$個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A, B, C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3　袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。

(2)　試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率q_{A}を n を用いて表せ。また，試行 1, 試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率q_{C}を n を用いて表せ。

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X, 箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y, 箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ。また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ。

(4)　(3)の事象 Y が起こったとき，(3)の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3)の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3) $f(x)$ および m と k を(2)のように定める。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$ が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい。

1

問題のページへ

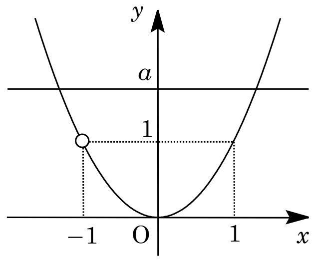
(1)　$C: y=x^3+x^2$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線 $L_a: y=a(x+1)$ を連立して,

$$x^3+x^2=a(x+1),\ (x+1)(x^2-a)=0$$

これより，$x=-1$ または $x^2=a$ となる。

ここで, C と L_a が 2 つの共有点をもつのは，$x^2=a$ が $x\neq-1$ である解を 1 つもつことに対応する。

すなわち，曲線 $y=x^2\ (x\neq-1)$ と直線 $y=a$ が 1 つの共有点をもつことより，$a=0$ または $a=1$ である。



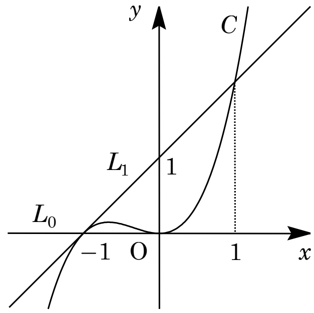
(2)　C と L_a が 2 つの共有点をもつとき，C と L_a で囲まれた部分の面積 S は,

(i)　$a=0$ のとき　$L_0: y=0$ より，

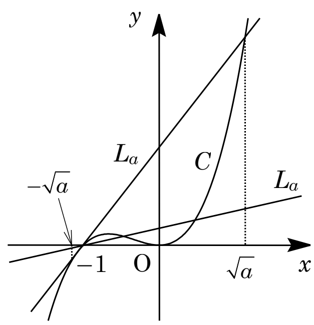
$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

(ii)　$a=1$ のとき　$L_1: y=x+1$ より，

$$S=\int_{-1}^{1}(x+1-x^3-x^2)dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$$
$$=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$



(3)　C と L_a が 3 つの共有点をもつのは，$x^2=a$ が $x\neq-1$ である解を 2 つもつことに対応するので，$0<a<1$ または $a>1$ である。そして，このとき共有点の x 座標は，$x=-1,\ \pm\sqrt{a}$ となる。



(i)　$0<a<1$ のとき

$-1<-\sqrt{a}<\sqrt{a}$ より，C と L_a で囲まれた部分の面積のうち，$-1\leqq x\leqq-\sqrt{a}$ の部分を S_1，$-\sqrt{a}\leqq x\leqq\sqrt{a}$ の部分を S_2 とおくと，(2)から，$0<S_1<\dfrac{1}{12}$，$0<S_2<\dfrac{4}{3}$ となるので,

$$|S_1-S_2|<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$$

これより，$|S_1-S_2|=\dfrac{3}{2}$ となる a は存在しない。

(ii)　$a>1$ のとき

$-\sqrt{a}<-1<\sqrt{a}$ より, C と L_a で囲まれた部分の面積のうち，$-\sqrt{a}\leqq x\leqq-1$ の部分を S_1，$-1\leqq x\leqq\sqrt{a}$ の部分を S_2 とおくと,

$$S_1-S_2=\int_{-\sqrt{a}}^{-1}(x^3+x^2-ax-a)\,dx-\int_{-1}^{\sqrt{a}}(ax+a-x^3-x^2)\,dx$$
$$=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(x^3+x^2-ax-a)\,dx=2\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{x^3}{3}-ax\Big]_0^{\sqrt{a}}=\frac{2}{3}a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}=-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$|S_1-S_2|=\dfrac{3}{2}$ より $\dfrac{4}{3}a\sqrt{a}=\dfrac{3}{2}$ となり，$(\sqrt{a})^3=\dfrac{9}{8}$ すなわち $\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{2}$ である。

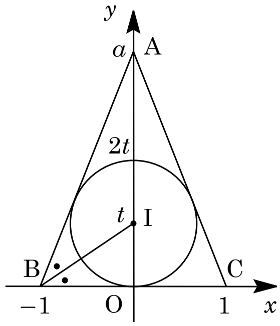
よって，$a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{3}$ となり，この値は $a>1$ を満たしている。

［解　説］

定積分と面積の問題です。(3)の(i)の場合の処理に(2)の結果を利用する点がポイントとなっています。初めは力づくの処理を試みましたが。

2

問題のページへ



(1)　$a>0$，$0<t<1$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円 S の中心を $\mathrm{I}(0,\ t)$ とする。ここで，$\angle\mathrm{IBC}=\theta$ とおくと，

$$t=\mathrm{OB}\tan\theta=\tan\theta,\quad a=\mathrm{OB}\tan 2\theta=\tan 2\theta$$

(2)　$a=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ ………(＊)

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると，$\mathrm{AG}:\mathrm{GO}=2:1$ より $\mathrm{G}\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ となる。

ここで，G が S の周上にあるとき，$\dfrac{a}{3}>0$ に注意すると $\dfrac{a}{3}=2t$ となり，(＊)から，

$$\frac{2t}{3(1-t^2)}=2t,\ 1=3(1-t^2),\ 3t^2=2$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる。

(4)　直線 AC の傾きは $-a$ なので，点 B から直線 AC に下ろした垂線の方程式は，

$$y=\frac{1}{a}(x+1),\ y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{1}{a}$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H とすると，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ となる。

ここで，H が S の周上にあるとき，$\dfrac{1}{a}>0$ に注意すると $\dfrac{1}{a}=2t$ となり，(＊)から，

$$\frac{1-t^2}{2t}=2t,\ 1-t^2=4t^2,\ 5t^2=1$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

(5)　線分 AC の中点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ なので，線分 AC の垂直二等分線の方程式は，

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を P とすると，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$ となる。ここで，P が S の周上にあるとき $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ または $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ なので，

(i)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ のとき　$a^2-1=0$ となり，$a>0$ から $a=1$

(＊)より $\dfrac{2t}{1-t^2}=1$ すなわち $t^2+2t-1=0$ となり，$0<t<1$ から $t=-1+\sqrt{2}$

(ii)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ のとき　(＊)より $\dfrac{t}{1-t^2}-\dfrac{1-t^2}{4t}=2t$ となり，

$$4t^2-(1-t^2)^2=8t^2(1-t^2),\ 7t^4-2t^2-1=0$$

すると，$t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$ となり，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ である。

(i)(ii)より，t のとり得る値は，$t=-1+\sqrt{2}$，$\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ である。

［解　説］

三角形の五心を題材にした点と直線の問題です。(4)と(5)は図形的な方法も考えられますが，解答例のような座標計算の方が確実でしょう。なお，(5)は配慮の感じられる問題文です。

3

問題のページへ

(1)　$c_1=a$，$c_2=b$，$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ により定められる整数の数列 $\{c_n\}$ に対して，$a=39$，$b=13$ のとき，

$$c_3=c_2+c_1=13+3\cdot 13=4\cdot 13,\ c_4=c_3+c_2=4\cdot 13+13=5\cdot 13$$

$$c_5=c_4+c_3=5\cdot 13+4\cdot 13=9\cdot 13,\ c_6=c_5+c_4=9\cdot 13+5\cdot 13=14\cdot 13$$

これより，c_5 と c_6 の最大公約数は 13 である。

(2)　a と b がともに奇数のとき，命題 P_n「c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である」を，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$c_1=a$，$c_2=b$ はともに奇数で，$c_3=b+a$ は偶数である。

(ii)　$n=k$ のとき　c_{3k-2} と c_{3k-1} はともに奇数で，c_{3k} は偶数と仮定する。

$c_{3k+1}=c_{3k}+c_{3k-1}$ は奇数，$c_{3k+2}=c_{3k+1}+c_{3k}$ は奇数，$c_{3k+3}=c_{3k+2}+c_{3k+1}$ は偶数となり，$n=k+1$ のときも P_n は成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，命題 P_n は成り立っている。

(3)　自然数 d に対し，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n が d の倍数になることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$c_1=a$，$c_2=b$ は，ともに d の倍数である。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　c_k，c_{k+1} が d の倍数であると仮定する。

すると，l, m を自然数として，$c_k=dl$，$c_{k+1}=dm$ とおけ，

$$c_{k+2}=c_{k+1}+c_k=dm+dl=d(m+l)$$

これより，c_{k+2} は d の倍数である。

(i)(ii)より，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n は d の倍数になる。

(4)　$a+b$ が偶数であるのは，$(a,\ b)=$(奇数，奇数)，(偶数，偶数) のときである。

(Ⅰ) $(a,\ b)=$(奇数，奇数) のとき

$c_{2022}=c_{3\times 674}$ に注意すると，(2)から，c_{2022} は偶数である。

(Ⅱ) $(a,\ b)=$(偶数，偶数) のとき

(3)において $d=2$ とすると，c_{2022} は 2 の倍数，すなわち偶数である。

(Ⅰ)(Ⅱ)より，$a+b$ が偶数ならば，c_{2022} は偶数である。

したがって，c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ は奇数である。

［解　説］

漸化式と数学的帰納法の問題です。(2)と(3)の証明は容易ですが，この結果が(4)につながるという構図になっています。

4　　問題のページへ

(1)　まず，$i=0$ であったとき，袋に残った玉は赤玉 3 個，白玉 4 個である。この袋から 2 個の玉を取り出し箱 C に入れるとき，赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 は，

$$p_0=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

また，$i=1$ であったとき，袋に残った玉は赤玉 2 個，白玉 5 個である。この袋から 2 個の玉を取り出し箱 C に入れるとき，赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 は，

$$p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{21}$$

(2)　赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個入っている袋の中から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に赤玉が入る確率 q_A は，$q_\mathrm{A}=\dfrac{3}{n+8}$ である。

また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_C について，

(i)　箱 A に赤玉が入るとき　その確率は，$q_\mathrm{A}p_1=\dfrac{3}{n+8}\cdot\dfrac{1}{21}=\dfrac{1}{7(n+8)}$

(ii)　箱 A に白玉が入るとき　その確率は，$(1-q_\mathrm{A})p_0=\dfrac{n+5}{n+8}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{n+5}{7(n+8)}$

(i)(ii)より，$q_\mathrm{C}=\dfrac{1}{7(n+8)}+\dfrac{n+5}{7(n+8)}=\dfrac{n+6}{7(n+8)}$

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象 Z に対し，

$$P(X\cap Y)=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!\,5!}\cdot\frac{n!\,7!}{(n+7)!}$$
$$=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{6\cdot 7}{(n+6)(n+7)}=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$P(Y\cap Z)=P(X\cap Y\cap Z)+P(\overline{X}\cap Y\cap Z)$ なので，

$$P(X\cap Y\cap Z)=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdot\frac{1}{21}$$
$$=\frac{6}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

$$P(\overline{X}\cap Y\cap Z)=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!\,4!}\cdot\frac{n!\,7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7}$$
$$=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 7}{(n+5)(n+6)(n+7)}\cdot\frac{1}{7}=\frac{30}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

$$P(Y\cap Z)=\frac{6}{(n+6)(n+7)(n+8)}+\frac{30}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$
$$=\frac{36}{(n+6)(n+7)(n+8)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(4)　$P(\overline{X}\cap Y)=\dfrac{n+5}{n+8}\cdot\dfrac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}=\dfrac{210}{(n+6)(n+7)(n+8)}$ なので，①と合わせて，

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)$$
$$=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}+\frac{210}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$
$$=\frac{336}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

すると，①から，$P_Y(X)=\dfrac{P(Y\cap X)}{P(Y)}=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\dfrac{126}{336}=\dfrac{3}{8}$ となる。

また，②から，$P_Y(Z)=\dfrac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}=\dfrac{36}{336}=\dfrac{3}{28}$ である。

［解　説］

確率を題材にした読解力を試す問題です。共通テストの影響が強く感じられます。ただ，時間が不足することはないと思いますが。

$\boxed{5}$

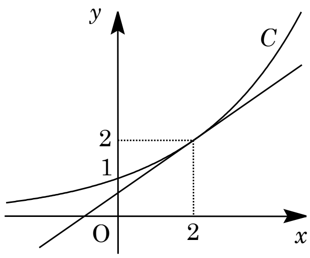
問題のページへ

(1)　$\sqrt{2}>1$ より $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<\sqrt{2}^{2}=2$ となり，$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}<\sqrt{2}^{2}=2$

また，$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{2}=2$ なので，$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}<\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ である。

(2)　$f(x)=\sqrt{2}^{x}$ のとき，$f'(x)=\sqrt{2}^{x}\log\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}^{x}\log 2$ となり，

$$f(2)=\sqrt{2}^{2}=2,\quad f'(2)=\frac{1}{2}\sqrt{2}^{2}\log 2=\log 2$$



すると，点$(2,\ f(2))$における接線の方程式は，

$$y-2=(\log 2)(x-2),\quad y=(\log 2)x-2\log 2+2$$

この式が，$y=mx+k$ と一致することより，

$$m=\log 2,\quad k=-2\log 2+2$$

(3)　$g(x)=f(x)-(mx+k)=\sqrt{2}^{x}-(\log 2)x+2\log 2-2$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2}^{x}\log 2-\log 2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}^{x}-2)\log 2$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，$g(x)\geqq 0$ から，$f(x)\geqq mx+k$ ……①である。

(4)　$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)$ で定義される数列$\{a_n\}$に対し，①から，

$$f(a_n)\geqq ma_n+k,\quad a_{n+1}\geqq(\log 2)a_n-2\log 2+2$$

すると，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)(2-a_n)$ ………②

ここで，$a_n\leqq 2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\sqrt{2}<2$ で成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k\leqq 2$ と仮定すると，$a_{k+1}=\sqrt{2}^{a_k}\leqq\sqrt{2}^{2}=2$

(i)(ii)より，$a_n\leqq 2$ である。

したがって，②と合わせて，$0\leqq 2-a_{n+1}\leqq(\log 2)(2-a_n)$ となり，

$$0\leqq 2-a_n\leqq(2-a_1)(\log 2)^{n-1}=(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$0<\log 2<\log e=1$ から，$n\to\infty$ のとき $(\log 2)^{n-1}\to 0$ となるので，③より，

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=2$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。(4)は平均値の定理の出番かと思いましたが，図から明らかといってもよい(3)の不等式が利用できました。