

1

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の満たす条件を求めよ。
- (2) 次の不等式を解け。 $|x+1| + |x-2| \leq 4$
- (3) x が(2)の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

座標平面において、2 つの放物線 $y = x^2$ ， $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $A(1, 1)$ ，点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり、 \overline{AB} と \overline{CB} は垂直であるとする。このとき、 B の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり、 \overline{AD} と \overline{CD} は垂直であるとする。このとき、 D の座標を求めよ。
- (3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき、四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c とする。また, $f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。
- (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。
- (4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, 少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b, c を実数とし、2 次方程式 $x^2 + x - (c-1) = 0$ が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。さらに、2 つの等式 $a + b = c^2$, $a\alpha + b\beta + c = 0$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1) α, β および $b - a$ を、それぞれ c を用いて表せ。

以下において、 a, b, c は自然数とする。

(2) $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき、自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて、 $4c-3 = s^2$ と表せるとき、 s と a は等式

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき、自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面において、曲線 $y = e^x$ 上の点 $P(t, e^t)$ における法線を l とし、 l と y 軸との交点を Q とする。 $t \neq 0$ のとき、線分 PQ の中点を R とし、 $t = 0$ のときは $R(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき、点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。
- (3) (2)の曲線 C , y 軸, 直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。
- (4) (3)の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

6

解答解説のページへ

座標平面において、 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $P(3, 0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle OAB$ を考える。ただし、円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき、 r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が(2)の範囲で変化するとき、点 B の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

1

問題のページへ

(1) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ に対して,

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a$$

$$= -(2x-1)(x-a)$$

$f(x)$ が $x=a$ で極大値をとる条件は,

$f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で正から負に変化することなので, $a > \frac{1}{2}$ である。

x	...	$\frac{1}{2}$...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘		↗	

(2) 不等式 $|x+1| + |x-2| \leq 4$ ……(*) に対して,

(i) $x < -1$ のとき $-(x+1) - (x-2) \leq 4$ より $-2x \leq 3$ となり, $x \geq -\frac{3}{2}$

これより, (*) は $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ で満たされている。

(ii) $-1 \leq x < 2$ のとき $(x+1) - (x-2) \leq 4$ より $3 \leq 4$ となり, つねに成立。

これより, (*) は $-1 \leq x < 2$ で満たされている。

(iii) $x \geq 2$ のとき $(x+1) + (x-2) \leq 4$ より $2x \leq 5$ となり, $x \leq \frac{5}{2}$

これより, (*) は $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$ で満たされている。

(i)~(iii) より, (*) の解は $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ である。

(3) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ における $f(x)$ の最大値と最小値について, $f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$$

(i) $a \geq \frac{5}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減は右表で, $f\left(-\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$ から, $f(x)$ の最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$,
最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}$ である。

x	$-\frac{3}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

(ii) $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減は右表で, 最大値について, $D_1 = f(a) - f\left(-\frac{3}{2}\right)$ とおくと,

x	$-\frac{3}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	a	...	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$$D_1 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{15}{4}a - \frac{27}{8}, \quad D_1' = a^2 - a - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}(2a+3)(2a-5)$$

すると, $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$ において $D_1' < 0$ から D_1 は単調に減少する。 $a = \frac{1}{2}$ のとき

$D_1 = -\frac{16}{3} < 0$ なので, $D_1 < 0$ すなわち $f(a) < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ である。

これより, $f(x)$ の最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$ である。

また, 最小値について, $D_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)$ とおくと,

$$D_2 = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24} - \frac{15}{4}a + \frac{175}{24} = -4a + \frac{22}{3} = -4\left(a - \frac{11}{6}\right)$$

(ii-i) $D_2 \geq 0$ ($\frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6}$) のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f\left(\frac{5}{2}\right)$ より, $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$ である。

(ii-ii) $D_2 < 0$ ($\frac{11}{6} < a \leq \frac{5}{2}$) のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{5}{2}\right)$ より, $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}$ である。

(i)(ii) より, $f(x)$ の最大値は $\frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$ であり, 最小値は,

$$-\frac{a}{4} + \frac{1}{24} \left(\frac{11}{6} < a \text{ のとき}\right), \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \left(\frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6} \text{ のとき}\right)$$

[解 説]

微分と最大・最小についての問題です。内容は標準的ですが, ただ数値計算がかなり煩雑です。

2

問題のページへ

- (1) 放物線 $y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 上に点 $A(1, 1)$, 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ 上に点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に、点 A と異なる点 $B(t, t^2)$ ($t \neq 1$) を, \overline{AB} と \overline{CB} が垂直になるようにとると,

$$\overline{AB} = (t-1, t^2-1) = (t-1)(1, t+1)$$

$$\overline{CB} = (t-\sqrt{2}+1, t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると, $\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0$ から,

$$(t-\sqrt{2}+1) + (t+1)(t^2-\sqrt{2}-1) = 0$$

まとめると, $t^3 + t^2 - \sqrt{2}t - 2\sqrt{2} = 0$ となり,

$$(t-\sqrt{2})\{t^2 + (\sqrt{2}+1)t + 2\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$t^2 + (\sqrt{2}+1)t + 2 = 0$ は, $D = (\sqrt{2}+1)^2 - 8 = 2\sqrt{2} - 5 < 0$ より実数解をもたないので, ③の実数解は $t = \sqrt{2}$ となり, これより $B(\sqrt{2}, 2)$ である。

- (2) 放物線②上に、点 C と異なる点 $D(s, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2})$ ($s \neq \sqrt{2}-1$) を, \overline{AD} と \overline{CD} が垂直になるようにとると, $\overline{AD} = (s-1, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2} - 1)$

$$\overline{CD} = (s-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1)$$

$$= (s-\sqrt{2}+1)(1, -\sqrt{2}s + \sqrt{2} + 1)$$

すると, $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$ から,

$$(s-1) + (-\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2} - 1)(-\sqrt{2}s + \sqrt{2} + 1) = 0$$

まとめると, $s^3 - (2\sqrt{2}+1)s^2 + (2\sqrt{2}+1)s = 0$ となり,

$$s\{s^2 - (2\sqrt{2}+1)s + 2\sqrt{2}+1\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

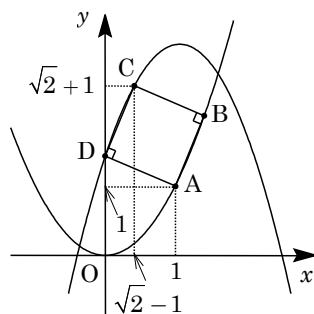
$s^2 - (2\sqrt{2}+1)s + 2\sqrt{2}+1 = 0$ は, $D = (2\sqrt{2}+1)^2 - 4(2\sqrt{2}+1) = 5 - 4\sqrt{2} < 0$ より実数解をもたないので, ④の実数解は $s = 0$ となり, これより $D(0, \sqrt{2})$ である。

- (3) (1)(2)より, $\overline{AB} = (\sqrt{2}-1, 1)$, $\overline{AD} = (-1, \sqrt{2}-1)$ となり,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = -(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1) = 0$$

これより, \overline{AB} と \overline{AD} は垂直になり, 四角形 $ABCD$ は長方形である。

さらに, $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 1}$ から, 四角形 $ABCD$ は正方形である。



[解説]

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの、計算量はかなりのもので、時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

- (1) さいころを3回投げ、出た目の数を順に a, b, c とする。
 ここで、 $b^2 > 4c$ となるのは、 $c=1, 2$ のとき $3 \leq b \leq 6$ で4通りずつ、 $c=3$ のとき $4 \leq b \leq 6$ で3通り、 $c=4, 5, 6$ のとき $5 \leq b \leq 6$ で2通りずつである。
 a は任意なので、求める確率は、 $\frac{6 \times (4 \times 2 + 3 + 2 \times 3)}{6^3} = \frac{17}{36}$ である。
- (2) $f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ に対し、 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつのは、
 (i) a が偶数 ($a=2, 4, 6$) のとき $f(x) = x^2 + bx + c$
 $D > 0$ ($b^2 - 4c > 0$) から、 $3 \times (4 \times 2 + 3 + 2 \times 3) = 3 \times 17$ 通りの場合がある。
 (ii) a が奇数 ($a=1, 3, 5$) のとき $f(x) = -x^2 + bx + c$
 $D > 0$ ($b^2 + 4c > 0$) から、任意の b, c で成り立ち、 3×6^2 通りの場合がある。
 (i)(ii) より、求める確率は、 $\frac{3 \times 17 + 3 \times 6^2}{6^3} = \frac{53}{72}$ である。
- (3) $f'(x) = 2(-1)^a x + b$ となり、 $f'(1) = 7$ より $2(-1)^a + b = 7 \dots\dots\dots(*)$
 ここで、 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち、かつ $f'(1) = 7$ を満たすのは、
 (i) a が偶数 ($a=2, 4, 6$) のとき $f(x) = x^2 + bx + c$
 $(*)$ より $2 + b = 7$ となるので $b = 5$ である。また $D > 0$ ($5^2 > 4c$) より、 $1 \leq c \leq 6$ となり、 $3 \times 1 \times 6 = 18$ 通りの場合がある。
 (ii) a が奇数 ($a=1, 3, 5$) のとき $f(x) = -x^2 + bx + c$
 $(*)$ より $-2 + b = 7$ となるので満たす b は存在しない。
 (i)(ii) より、この場合の確率は、 $\frac{18 + 0}{6^3} = \frac{1}{12}$ である。
 以上より、求める条件付き確率は、 $\frac{1}{12} \div \frac{53}{72} = \frac{6}{53}$ である。
- (4) $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち、かつ少なくとも1つが正の解であるのは、
 (i) a が偶数 ($a=2, 4, 6$) のとき $f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$
 $x = -\frac{b}{2} < 0$ かつ $f(0) = c > 0$ なので、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と共有点をもたない。
 (ii) a が奇数 ($a=1, 3, 5$) のとき $f(x) = -x^2 + bx + c = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + c$
 $x = \frac{b}{2} > 0$ かつ $f(0) = c > 0$ なので、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と共有点をつねに1つもち、 $3 \times 6 \times 6 = 108$ 通りの場合がある。
 (i)(ii) より、この場合の確率は、 $\frac{0 + 108}{6^3} = \frac{1}{2}$ である。
 以上より、求める条件付き確率は、 $\frac{1}{2} \div \frac{53}{72} = \frac{36}{53}$ である。

[解説]

題材も頻出タイプの確率の基本問題です。(3)と(4)は条件付き確率を求めるものですが、複雑な処理はなく、あっさり解決できます。

4

問題のページへ

- (1) c を実数とし、2 次方程式 $x^2 + x - (c-1) = 0$ が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとき、
 $D = 1 + 4(c-1) = 4c - 3 > 0$ のもとで、

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{4c-3}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{4c-3}}{2}$$

a, b を実数とし、 $a + b = c^2 \cdots \cdots$ ①、 $a\alpha + b\beta + c = 0 \cdots \cdots$ ②が成り立ち、②から、

$$a \cdot \frac{-1 - \sqrt{4c-3}}{2} + b \cdot \frac{-1 + \sqrt{4c-3}}{2} + c = 0$$

$$-(a+b) + (b-a)\sqrt{4c-3} + 2c = 0$$

①を代入すると、 $(b-a)\sqrt{4c-3} = c^2 - 2c$ となり、 $b-a = \frac{c(c-2)}{\sqrt{4c-3}} \cdots \cdots$ ③

- (2) 自然数 c に対し、 $\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき、 $\sqrt{4c-3}$ は無理数である。
 そして、 a, b も自然数のとき、 $c(c-2) \neq 0$ とすると、③の左辺は有理数、右辺は無理数となり成立しない。これより、 $c(c-2) = 0$ となり、 $c = 2$ である。

このとき、③から $a = b$ 、①から $a + b = 4$ なので、 $a = b = 2$ となり、

$$(a, b, c) = (2, 2, 2)$$

- (3) 自然数 s を用い、 $4c-3 = s^2 \cdots \cdots$ ④のとき、③から、 $b-a = \frac{c(c-2)}{s} \cdots \cdots$ ⑤

①⑤から、 $2a = c^2 - \frac{c(c-2)}{s}$ となり、 $2as = (s-1)c^2 + 2c \cdots \cdots$ ⑥

④から $c = \frac{s^2+3}{4}$ となり、⑥に代入すると $2as = \frac{(s-1)(s^2+3)^2}{16} + \frac{s^2+3}{2}$

$$32as = (s-1)(s^4 + 6s^2 + 9) + 8(s^2 + 3)$$

まとめると、 $s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15 \cdots \cdots$ ⑦

- (4) ⑦より、 $s\{s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + (9 - 32a)\} = -15$

すると、 $s^4 - s^3 + 6s^2 + 2s + (9 - 32a)$ は整数なので、 s は 15 の正の約数である。

(i) $s = 1$ のとき ④より $c = \frac{1^2+3}{4} = 1$

すると、⑥より $2a = 2$ から $a = 1$ 、①より $b = 1^2 - 1 = 0$ となり不適。

(ii) $s = 3$ のとき ④より $c = \frac{3^2+3}{4} = 3$

すると、⑥より $6a = 2 \cdot 3^2 + 6$ から $a = 4$ 、①より $b = 3^2 - 4 = 5$

(iii) $s = 5$ のとき ④より $c = \frac{5^2+3}{4} = 7$

すると、⑥より $10a = 4 \cdot 7^2 + 14$ から $a = 21$ 、①より $b = 7^2 - 21 = 28$

(iv) $s = 15$ のとき ④より $c = \frac{15^2+3}{4} = 57$

すると、⑥より $30a = 14 \cdot 57^2 + 114$ から $a = 1520$ 、①より $b = 57^2 - 1520 = 1729$

(i)～(iv)より, $(a, b, c) = (4, 5, 3), (21, 28, 7), (1520, 1729, 57)$

[解説]

誘導の細かい整数問題です。ただ、文字がたくさん現れ、量的に計算も多いので、時間はかなり必要になります。

5

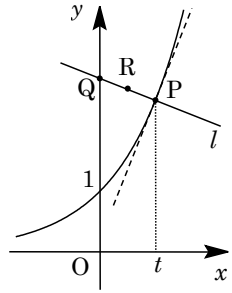
問題のページへ

- (1) 曲線 $y = e^x$ に対し $y' = e^x$ となり、点 $P(t, e^t)$ における接線の傾きは e^t なので、法線 l の傾きは $-e^{-t}$ から、 l の方程式は、

$$y - e^t = -e^{-t}(x - t), \quad y = -e^{-t}x + te^{-t} + e^t \dots\dots\dots ①$$

- (2) l と y 軸との交点 Q は、①から $Q(0, te^{-t} + e^t)$ となり、線分 PQ の中点を $R(x, y)$ とおくと、

$$x = \frac{t}{2} \dots\dots\dots ②, \quad y = \frac{e^t + te^{-t} + e^t}{2} = \frac{te^{-t} + 2e^t}{2} \dots\dots\dots ③$$



すると、②から $t = 2x$ となり、③に代入すると、

$$y = \frac{2xe^{-2x} + 2e^{2x}}{2} = xe^{-2x} + e^{2x}$$

なお、 $t = 0$ のとき、②③から $R(0, 1)$ となり、題意を満たしている。

したがって、点 R の描く曲線 C の方程式は、 $y = xe^{-2x} + e^{2x} \dots\dots\dots ④$

- (3) $f(x) = xe^{-2x} + e^{2x}$ とおくと、④より $C: y = f(x)$ となり、

$$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 2e^{2x} = e^{-2x}(1 - 2x + 2e^{4x})$$

ここで、 $g(x) = 1 - 2x + 2e^{4x}$ とおくと、

$$g'(x) = -2 + 8e^{4x} = 2(4e^{4x} - 1)$$

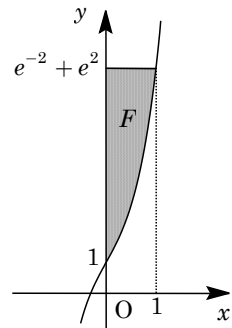
すると、 $g'(x) = 0$ の解は $x = \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \log 2$

x	...	$-\frac{1}{2} \log 2$...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

から、 $g(x)$ の増減は右表のようになり、

$$g\left(-\frac{1}{2} \log 2\right) = 1 + \log 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \log 2 > 0$$

これより、 $g(x) > 0$ すなわち $f'(x) > 0$ から、 $f(x)$ は単調に増加する。そして、 $f(1) = e^{-2} + e^2$ に注意すると、曲線 C 、 y 軸、直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積 S は、



$$\begin{aligned} S &= (e^{-2} + e^2) \cdot 1 - \int_0^1 (xe^{-2x} + e^{2x}) dx \\ &= e^{-2} + e^2 + \left[\frac{1}{2} xe^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx - \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= e^{-2} + e^2 + \frac{1}{2} e^{-2} + \left[\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} e^{-2} + \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^2 + \frac{7}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- (4) 図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi (e^{-2} + e^2)^2 \cdot 1 - \pi \int_0^1 (xe^{-2x} + e^{2x})^2 dx \\ &= \pi (e^{-4} + 2 + e^4) - \pi \left\{ \int_0^1 x^2 e^{-4x} dx + \int_0^1 2x dx + \int_0^1 e^{4x} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \int_0^1 2x dx + \int_0^1 e^{4x} dx = \left[x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} e^4 + \frac{3}{4} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-4x} dx &= -\left[\frac{1}{4} x^2 e^{-4x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x e^{-4x} dx \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4} - \left[\frac{1}{8} x e^{-4x} \right]_0^1 + \frac{1}{8} \int_0^1 e^{-4x} dx \\ &= -\frac{1}{4} e^{-4} - \frac{1}{8} e^{-4} - \left[\frac{1}{32} e^{-4x} \right]_0^1 = -\frac{3}{8} e^{-4} - \frac{1}{32} (e^{-4} - 1) \\ &= -\frac{13}{32} e^{-4} + \frac{1}{32} \dots\dots\dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

⑤⑥を代入すると,

$$V = \pi(e^{-4} + 2 + e^4) - \pi\left(-\frac{13}{32} e^{-4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{4} e^4 + \frac{3}{4}\right) = \pi\left(\frac{3}{4} e^4 + \frac{45}{32} e^{-4} + \frac{39}{32}\right)$$

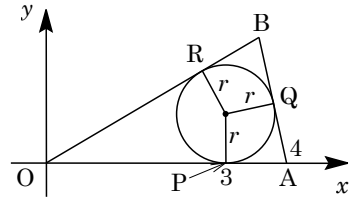
[解説]

軌跡および面積と体積の問題です。基本的な考え方で処理ができますが、ただ計算は半端ではありません。

6

問題のページへ

- (1) 点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ および第 1 象限の点 B を頂点とする $\triangle OAB$ の内接円 C と、辺 OA , AB , OB の接点をそれぞれ $P(3, 0)$, Q , R とおくと、

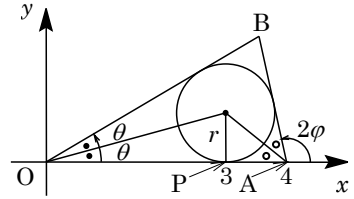


$$OB = OR + BR = OP + BQ = 3 + BQ$$

$$AB = AQ + BQ = AP + BQ = 1 + BQ$$

$$\text{これより、} OB - AB = (3 + BQ) - (1 + BQ) = 2 \cdots \cdots (*)$$

- (2) 線分 OB , AB と x 軸の正の部分とのなす角をそれぞれ 2θ , 2φ とおくと、内接円 C の半径 r は、



$$r = OP \tan \theta = 3 \tan \theta$$

$$r = AP \tan \frac{\pi - 2\varphi}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{\tan \varphi}$$

すると、 $\tan \theta = \frac{r}{3}$, $\tan \varphi = \frac{1}{r}$ となる。

さて、点 B が第 1 象限にある条件は、 $0 < 2\theta < 2\varphi < \pi$ から $0 < \theta < \varphi < \frac{\pi}{2}$ となり、

$$0 < \tan \theta < \tan \varphi, \quad 0 < \frac{r}{3} < \frac{1}{r}$$

よって、 $0 < r < \sqrt{3}$ となる。

- (3) (*)より、点 B は 2 定点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ からの距離の差が一定なので、点 B の軌跡は 2 点 O, A を焦点とする双曲線の右側の枝の第 1 象限の部分となる。

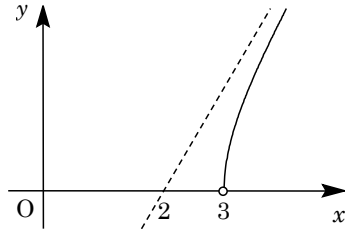
ここで、線分 OA の中点が $(2, 0)$ より、その方程式を $\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおく。

まず、(*)より $2a = 2$ から $a = 1$ となり、焦点間距離 $2c = 4$ から $c = 2$ である。

そして、 $a^2 + b^2 = c^2$ から、 $b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ なので、双曲線の方程式は、

$$(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

漸近線は、 $y = \pm\sqrt{3}(x-2)$ となり、点 B の軌跡は右図の曲線である。



ただし、端点の白丸は除く。

[解説]

双曲線の定義に関する問題です。(2)はいろいろな方法が考えられ、方針に迷うところですが。ここでは、 r が $r > 0$ で増加したとき、線分 OB と AB の傾きの変化に着目し、角を設定して記述しました。