1

解答解説のページへ

a, b を正の定数とする。$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の 3 つの条件(i)，(ii)，(iii)を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　$\mathrm{PA}=a$，$\mathrm{PB}=b$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ である。

(ii)　2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii)　$\mathrm{AB}=3\mathrm{AD}$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB の長さを a，b，θ を用いて表せ。

(2)　S を a，b，θ を用いて表せ。

(3)　θ が $0<\theta<\pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a, b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4)　$a=16$，$b=25$ とする。また，β を(3)で定めた値とする。$\theta=\beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。

2

解答解説のページへ

i を虚数単位とする。$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，$w = \dfrac{z-i}{z+1}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ。

(2)　t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を l_t とおく。点 z が直線 l_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。

(3)　P_t を(2)で定義した点とする。t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ。

(2)　$a > 0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l_t とおく。l_t が点 A を通るような実数 t がちょうど 2 つあるとする。このとき, a の値を求めよ。さらに，その 2 つの t の値を p, q（ただし，$p < q$）とおくとき, p, q を求めよ。

(3)　q を(2)で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$，直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin nx|\,dx$ の値を求めよ。

(3)　座標平面において連立不等式　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$，$y \leqq |\sin nx|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4)　座標平面において連立不等式　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,|\sin nx|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2，3 回目に出た目を a_3 とする。次に，1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k=1$，裏が出た場合は $b_k=a_k$ とおく。ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a_1+a_2+a_3=7$ である確率を求めよ。

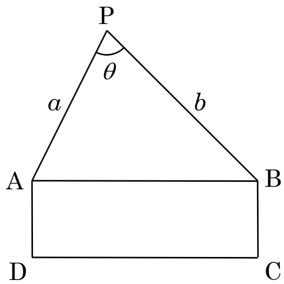
(2)　$b_1=1$ である確率を求めよ。

(3)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　右図の△PAB に余弦定理を適用すると,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

(2)　△PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とすると, $\mathrm{AD}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ より, (1)の結果を利用して,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{6}ab(3\sin\theta-4\cos\theta)$$

(3)　$f(\theta)=3\sin\theta-4\cos\theta$ とおくと, $f(\theta)=5\sin(\theta+\alpha)$ となり,

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=-\frac{4}{5}$$

ここで, $0<\theta<\pi$ のとき $\alpha<\theta+\alpha<\pi+\alpha$ となり, α が第 4 象限の角であることに注意すると, $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ のとき $f(\theta)$ は最大値 5 をとる。

これより, S の最大値 M は, $M=\dfrac{1}{3}a^2+\dfrac{1}{3}b^2+\dfrac{5}{6}ab$ である。

このとき $\theta=\beta$ なので, $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ から,

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=-\frac{4}{5}$$

(4)　$a=16$, $b=25$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$ のとき, $\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5}=120$

また, $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ から, $\mathrm{AB}=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)}=\sqrt{1521}=39$ となり, 点 P と直線 AB の距離を h とおくと, $\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{39}{2}h$ となるので,

$$\frac{39}{2}h=120,\ h=120\cdot\frac{2}{39}=\frac{80}{13}$$

［解　説］

三角比の図形への応用問題です。(3)で $f(\theta)$ の最大値を求める際に, 内積という見方をした方がすっきりしますが, ここでは問題文に α でなく β が指定してある点に注目し, 出題者の意図も忖度して sin での合成で処理しました。

2

問題のページへ

(1)　$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，$w = \dfrac{z-i}{z+1}$ ……①において，$w=1$ とすると，

$$1 = \frac{z-i}{z+1},\ \ z+1 = z-i$$

これから，$1=-i$ となり成立しない。よって，$w \neq 1$ である。

このとき，①から，$(z+1)w = z-i$ となり，$(w-1)z = -w-i$ から，

$$z = -\frac{w+i}{w-1} \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　点 z は，実部 $t\,(t \neq -1)$ の直線 l_t 上を動くことより，$\dfrac{z+\overline{z}}{2} = t$ ………③

②を③に代入すると，$-\dfrac{w+i}{w-1} - \dfrac{\overline{w}-i}{\overline{w}-1} = 2t$ となり，$w \neq 1$ のもとで，

$$2t(w-1)(\overline{w}-1) + (w+i)(\overline{w}-1) + (w-1)(\overline{w}-i) = 0$$

$$(2t+2)w\overline{w} - (2t+1+i)w - (2t+1-i)\overline{w} + 2t = 0$$

$t \neq -1$ から，$w\overline{w} - \dfrac{2t+1+i}{2t+2}w - \dfrac{2t+1-i}{2t+2}\overline{w} + \dfrac{t}{t+1} = 0$ ………④

ここで，$\alpha = \dfrac{2t+1-i}{2t+2}$ とおくと $|\alpha|^2 = \dfrac{(2t+1)^2+1}{4(t+1)^2} = \dfrac{2t^2+2t+1}{2(t+1)^2}$ となり，④より，

$$w\overline{w} - \overline{\alpha}w - \alpha\overline{w} + \frac{t}{t+1} = 0,\ \ (w-\alpha)(\overline{w}-\overline{\alpha}) = \frac{2t^2+2t+1}{2(t+1)^2} - \frac{t}{t+1}$$

$$|w-\alpha|^2 = \frac{1}{2(t+1)^2},\ \ |w-\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}\,|t+1|} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

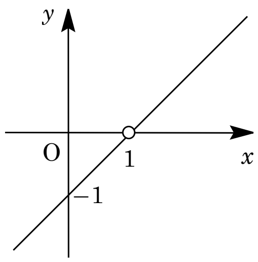
⑤より，点 w の軌跡は，中心が点 α，半径が $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,|t+1|}$ の円から，点 1 を除いたものになる。よって，円の中心 P_t に対応する複素数は $\alpha = \dfrac{2t+1-i}{2t+2}$ である。

(3)　$\alpha = x+yi$ とおくと，$x = \dfrac{2t+1}{2t+2}$ ……⑥，$y = -\dfrac{1}{2t+2}$ ……⑦

⑦より，$2t+2 = -\dfrac{1}{y}\ (y \neq 0)$ となり，⑥に代入すると，

$$x = 1 - \frac{1}{2t+2} = 1+y,\ \ y = x-1\ (y \neq 0)$$

よって，P_t が描く図形を複素数平面上に図示すると，右図の直線となる。ただし，点 1 は除く。



［解　説］

複素数平面上の変換についての有名問題です。なお，直線 l_t は③式で表しましたが，$|z| = |z-2t|$ から始める方法も考えられます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^{-2x^2}$ に対して,

$$f'(x)=e^{-2x^2}+x(-4x)e^{-2x^2}=(1-4x^2)e^{-2x^2}=(1+2x)(1-2x)e^{-2x^2}$$

すると，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=\frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，$x=-\frac{1}{2}$ のとき極小値 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$

(2)　点 $(t,\ f(t))$ における接線 l_t は,

$$y-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(x-t)$$

l_t が点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通ることより，$-te^{-2t^2}=(1-4t^2)e^{-2t^2}(a-t)$ となり,

$$-t=(1-4t^2)(a-t),\ -t=a-4at^2-t+4t^3,\ 4t^3-4at^2+a=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$g(t)=4t^3-4at^2+a$ とおくと，$(*)$は $g(t)=0$ となり,

$$g'(t)=12t^2-8at=4t(3t-2a)$$

$a>0$ から，$g(t)$ の増減は右表のようになる。そして，点 A を通る l_t が 2 本，すなわち$(*)$が 2 つの解をもつ条件は $g\left(\frac{2}{3}a\right)=0$ より,

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	a	$\searrow$		$\nearrow$

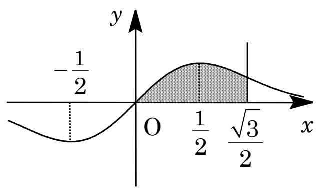
$$\frac{32}{27}a^3-\frac{16}{9}a^3+a=0,\ -\frac{16}{27}a^3+a=0$$

すると，$a>0$ より，$a=\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ となる。

このとき，$(*)$は，$4t^3-3\sqrt{3}t^2+\frac{3}{4}\sqrt{3}=0$ となり，$\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(4t+\sqrt{3})=0$

よって，$t=\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}$ から，$p=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，$q=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

(3)　曲線 $y=f(x)$，直線 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}xe^{-2x^2}dx=\Big[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(2)の後半は，$(*)$が重解 $t=\frac{2}{3}a$ をもつことに注目すると，容易に計算が進みます。

4

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=\Big[-\frac{1}{n}\cos nx\Big]_0^{\frac{\pi}{n}}=-\frac{1}{n}(-1-1)=\frac{2}{n}$

(2) $f_n(x)=|\sin nx|$とおくと，$f_n\Big(x+\dfrac{\pi}{n}\Big)=\Big|\sin n\Big(x+\dfrac{\pi}{n}\Big)\Big|$から，

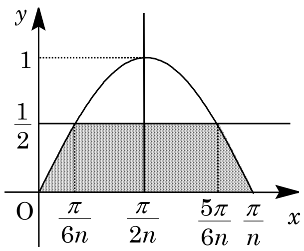
$$f_n\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)=|\sin(nx+\pi)|=|-\sin nx|=|\sin nx|=f_n(x)$$

これより，$f_n(x)$は周期$\dfrac{\pi}{n}$の周期関数であるので，(1)の結果から，

$$\int_0^{\pi}|\sin nx|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}|\sin nx|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx=n\cdot\frac{2}{n}=2$$

(3) $0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$，$y\leqq|\sin nx|$の表す図形を，$x$軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を$V$とおく。

ここで，$f_n(x)$の周期性に注目すると，Vは区間$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{n}$における回転体の体積の$n$倍になり，さらに直線$x=\dfrac{\pi}{2n}$に関する対称性を考え合わせると，



$$\frac{V}{2n}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6n}}\sin^2 nx\,dx+\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{6n}\Big)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6n}}(1-\cos 2nx)\,dx+\frac{\pi^2}{12n}$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\Big]_0^{\frac{\pi}{6n}}+\frac{\pi^2}{12n}=\frac{\pi}{2}\Big(\frac{\pi}{6n}-\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\frac{\pi^2}{12n}=\frac{\pi^2}{6n}-\frac{\sqrt{3}\pi}{8n}$$

よって，$V=2n\Big(\dfrac{\pi^2}{6n}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{8n}\Big)=\dfrac{\pi^2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$である。

(4) $0\leqq x\leqq\pi$，$0\leqq y\leqq\sqrt{x}\,|\sin nx|$の表す図形を，$x$軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を$W$とおくと，

$$W=\pi\int_0^{\pi}x\sin^2 nx\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}x(1-\cos 2nx)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x\Big(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big]_0^{\pi}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\Big(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi^2-\frac{\pi}{2}\Big[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4n^2}\cos 2nx\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^3}{4}$$

［解　説］

回転体の体積計算の問題です。ただ，流れを意識しながら解いていくと，設問(4)には戸惑いを感じます。

5

問題のページへ

(1)　さいころを 3 回投げ, 1 回目に出た目を a_1, 2 回目に出た目を a_2, 3 回目に出た目を a_3 とするとき, $a_1+a_2+a_3=7$ である事象を A とおく。

このとき, $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ の組合せは,

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 3\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

よって, 事象 A の確率は, $P(A)=\dfrac{1}{6^3}\times(3+3!+3+3)=\dfrac{5}{72}$ である。

(2)　さいころを 3 回投げた後に, 1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ として, k 回目が表の場合は $b_k=1$, 裏の場合は $b_k=a_k$ とおく。

このとき, $b_1=1$ であるのは, $a_1=1$ のときは硬貨の出方は任意, $a_1\neq1$ のときは硬貨が表の出る場合より, その確率は,

$$\frac{1}{6}\times1+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$

(3)　$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)=(1,\ 1,\ 1)$ である事象を B とおくと, (2)から,

$$P(B)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}$$

次に, $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 5)$ である事象を A' とおく。

すると, 事象 $A'\cap B$ すなわち $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であるのは, さいころの 1 回目, 2 回目に 1, 3 回目に 5 出て, 次に硬貨の 1 回目, 2 回目は任意, 3 回目に表が出る場合より, その確率は,

$$P(A'\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^4\cdot3^3}$$

よって, $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき, $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率は,

$$P_B(A')=\frac{P(B\cap A')}{P(B)}=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2^4\cdot3^3}\div\frac{7^3}{2^6\cdot3^3}=\frac{4}{343}$$

(4)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\}$ である事象を A_1, $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 2,\ 4\}$ である事象を A_2, $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 3,\ 3\}$ である事象を A_3, $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{2,\ 2,\ 3\}$ である事象を A_4 とおくと, (1)より $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ となる。

(i)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 1,\ 5\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_1\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2\cdot6^3}$$

(ii)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 2,\ 4\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_2\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3!=\frac{6}{2^2\cdot6^3}$$

(iii)　$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{1,\ 3,\ 3\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_3\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2^2\cdot6^3}$$

(iv) $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}=\{2,\ 2,\ 3\}$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$$P(A_4\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2^3\cdot 6^3}$$

(i)～(iv)より，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{2\cdot 6^3}+\dfrac{6}{2^2\cdot 6^3}+\dfrac{3}{2^2\cdot 6^3}+\dfrac{3}{2^3\cdot 6^3}=\dfrac{33}{2^3\cdot 6^3}=\dfrac{11}{2^6\cdot 3^2}$

よって，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率は,

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{11}{2^6\cdot 3^2}\div\frac{7^3}{2^6\cdot 3^3}=\frac{33}{343}$$

［解 説］

条件付き確率を求める問題です。非常に細かな誘導が付いています。文系では, 空間ベクトルを平面ベクトルに変更した設定で出題されています。