1　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3)　座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

複素数平面上の 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が$180°$より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に, 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を表す複素数を求めよ。

(2)　四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3)　四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3)　次の不等式を示せ。　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$

$\boxed{4}$　　解答解説のページへ

0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，…，Z_N とする。ここで，N は 3 以上の自然数である。さらに，複素数 $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1=\alpha^{Z_1},\ X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

により定める。$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，$X_n=\alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n=\alpha^2$ となる確率を Q_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ とする。$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ とする。$X_n=1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ。

(5)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，P_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上で，曲線 $C: y=x^3-3x$ と，$b>a^3-3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える。また，点 P に対し，2 つの不等式 $|x-a|\leqq 1$，$|y-b|\leqq 1$ によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ。

(2)　B と C が $x<-1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3)　B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4)　(3)の点 P の軌跡は，ある関数 $y=f(x)$ のグラフで表すことができる。この $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

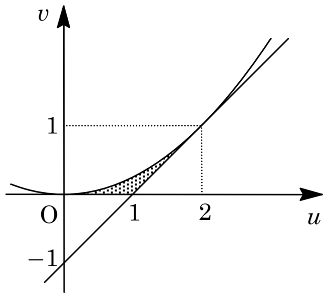
(1)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$$-\frac{u^2}{4}+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots ①,\quad 0\leqq\frac{u}{2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$$f(1)=1-u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ④$$



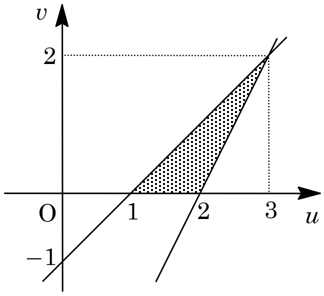
①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$f(1)=1-u+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$f(2)=4-2u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

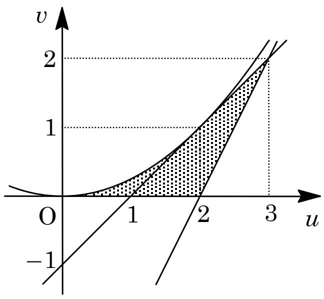


⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3)　点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，x, y の条件は $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，解と係数の関係から，

$$x+y=u\ ,\quad xy=v$$



これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，

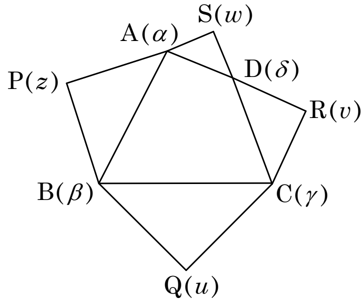
$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\left[\,u^3\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

［解　説］

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

2

問題のページへ



(1) 複素数平面上で，$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$，$D(\delta)$を頂点とする四角形 ABCD に対し，その外側に 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。このとき，$P(z)$，$Q(u)$，$R(v)$，$S(w)$とおく。

すると，P は B を中心に A を$\dfrac{\pi}{4}$回転し，距離を$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍したものとなり，

$$z-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha-\beta)=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)$$

よって，$z=\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta$である。

(2) (1)と同様にして，$u=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$，$v=\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta$，$w=\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

さて，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$$\frac{z+v}{2}=\frac{u+w}{2},\ z+v=u+w$$

すると，$\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma+\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

$$i\alpha-i\beta+i\gamma-i\delta=0,\ \alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，$(*)$より$\delta=\alpha-\beta+\gamma$となり，

$$\begin{aligned}w-z&=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta\\&=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta+\gamma)+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma\end{aligned}$$

また，$u-z=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma-\dfrac{1+i}{2}\alpha-\dfrac{1-i}{2}\beta=-\dfrac{1+i}{2}\alpha+i\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$から，

$$i(u-z)=-\frac{i+i^2}{2}\alpha+i^2\beta+\frac{i-i^2}{2}\gamma=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

よって，$w-z=i(u-z)$となり，すなわち S は P を中心に Q を$\dfrac{\pi}{2}$回転したものとなるので，$PS=PQ$かつ$\angle QPS=\dfrac{\pi}{2}$より四角形 PQRS は正方形である。

［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。なお，(2)の平行四辺形については，「2 本の対角線が互いに他を二等分する」という条件を利用しています。

3

問題のページへ

(1) $f(t)=e^t-1-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，これより $f(t)\geqq 0$ であり，

$$1+t\leqq e^t \cdots\cdots\cdots①$$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ とし，$u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ から，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{u^2}du=1+\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

(3) ①より，$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\geqq\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

また，①より $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$ となり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で $e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，(2)の結果を参照すると，②③から，

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

［解　説］

定積分と不等式についての問題です。(2)の結果が(3)へのざっくばらんな誘導となっています。なお，(2)の定積分の計算は頻出です。

4

問題のページへ

(1) $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ に対し，$\alpha^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$，$\alpha^0=\alpha^3=1$ である。

さて, 0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードから 1 枚を取り出し, 書かれた数字を見て元に戻すという操作を N 回繰り返し, カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_N とする。

そして，$X_1=\alpha^{Z_1}$ であるとき，$X_1=\alpha$ となるのは $Z_1=1$ のときより，その確率 P_1 は $P_1=\frac{1}{4}$ となる。

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ のとき，$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となるのは $Z_{n+1}=0,\ 3$ のときより，その確率は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ である。

(3) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ のとき，X_n は $1,\ \alpha,\ \alpha^2$ のいずれかである。

すると，$X_n=\alpha$，$X_n=\alpha^2$ となる確率がそれぞれ P_n，Q_n より，$X_n=1$ となる確率は，$1-P_n-Q_n$ と表せる。

(4) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ のとき，$X_{n+1}=\alpha$ となるのは，$X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}$ より，

(i) $X_n=1$ のとき　$\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha$ すなわち $Z_{n+1}=1$ のときである。

(ii) $X_n=\alpha$ のとき　$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ すなわち $Z_{n+1}=0,\ 3$ のときである。

(iii) $X_n=\alpha^2$ のとき　$\alpha^{Z_{n+1}}=\alpha^2$ すなわち $Z_{n+1}=2$ のときである。

(i)～(iii)より，$X_{n+1}=\alpha$ となる確率 P_{n+1} は,

$$P_{n+1}=\frac{1}{4}(1-P_n-Q_n)+\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}Q_n=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$$

(5) (1)から $P_1=\frac{1}{4}$ であり，また(4)の結果を，$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形すると，

$$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$P_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ となる。

［解 説］

複素数で味付けされた確率と漸化式の問題です。ただ, 最も要求されるのは, 問題文の読解力です。

5

問題のページへ

(1)　曲線$C : y = x^3 - 3x$に対して,

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

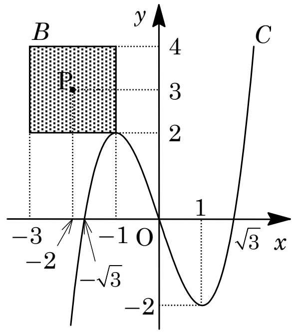
すると, Cの増減は右表およびCの概形は右図のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

さらに, $\mathrm{P}(-2,\ 3)$のとき, 領域Bは,

$$|x+2| \leqq 1,\ |y-3| \leqq 1$$

図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まれる。



(2)　$b > a^3 - 3a$を満たす$\mathrm{P}(a,\ b)$に対して,

$$B : |x-a| \leqq 1,\ |y-b| \leqq 1$$

さて, BとCの接点を$\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$とし, $t < -1$のとき,

$$a = t-1,\ b = t^3 - 3t + 1$$

すると, $t = a+1 < -1\ (a < -2)$となり,

$$b = (a+1)^3 - 3(a+1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

よって, 点Pの軌跡は, 曲線$y = x^3 + 3x^2 - 1\ (x < -2)$である。

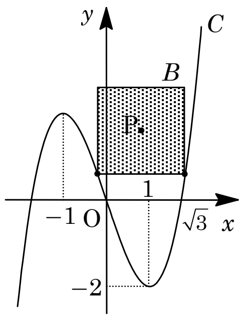
(3)　まず, BとCが右図の位置にあるとき, $\mathrm{P}(a,\ b)$について, 2点$(a-1,\ b-1)$, $(a+1,\ b-1)$はともにC上にあり,

$$b - 1 = (a-1)^3 - 3(a-1) \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b - 1 = (a+1)^3 - 3(a+1) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より$6a^2 + 2 - 6 = 0$となり, $a > 0$から$a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$であり,

このとき接点$\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$は, $t = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \pm 1$となる。



以下, $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$の位置関係をもとに場合分けをする。

(i)　$t < -1\ (a < -2)$のとき

(2)より, 点Pの軌跡は, 曲線$y = x^3 + 3x^2 - 1\ (x < -2)$である。

(ii)　$t = -1\ (-2 \leqq a \leqq 0)$のとき

このとき$b = 2 + 1 = 3$となり, 点Pの軌跡は, 線分$y = 3\ (-2 \leqq x \leqq 0)$である。

(iii)　$-1 < t \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{3} - 1\ \left(0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$のとき

このとき$a = t+1$, $b = t^3 - 3t + 1$となり,

$$b = (a-1)^3 - 3(a-1) + 1 = a^3 - 3a^2 + 3$$

よって, 点Pの軌跡は, 曲線$y = x^3 - 3x^2 + 3\ \left(0 < x \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$である。

(iv) $t > \dfrac{\sqrt{6}}{3}+1\left(a > \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$のとき

このとき $a = t-1$，$b = t^3-3t+1$ となり，

$$b = (a+1)^3-3(a+1)+1 = a^3+3a^2-1$$

よって，点 P の軌跡は，曲線 $y = x^3+3x^2-1\left(x > \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$である。

(4) 点 P の軌跡の方程式を $y = f(x)$ とすると，(3)から，

$$f(x) = x^3+3x^2-1\ (x < -2),\ \ f(x) = 3\ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

$$f(x) = x^3-3x^2+3\left(0 < x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \ f(x) = x^3+3x^2-1\left(x > \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

ここで，$f(x)$ の $x = 0$ における微分可能性について調べると，

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{3-3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{x^3-3x^2+3-3}{x} = \lim_{x\to+0}(x^2-3x) = 0$$

これより，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。

［解　説］

微分の応用と軌跡の融合問題です。3 次曲線のいわば「上に乗っている」正方形の中心の軌跡を求めるものですが，図をもとにした直感的な解答例になっています。誘導は細かいのですが作業量は多く，時間はかなりかかります。