1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　t の 2 次関数 $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ。

(2)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(4)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　実数θが$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，不等式$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} < 1$が成り立つことを示せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$を満たす実数$\theta$に対し，$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}\ \left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$により定まる実数$\alpha$は，$\theta$についての整式$f(\theta)$を用いて$\alpha = f(\theta)$と表すことができる。このような$f(\theta)$を1つ求めよ。

(3)　(2)で求めた$f(\theta)$を用いて，数列$\{\theta_n\}$を，

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \theta_{n+1} = f(\theta_n)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列$\{\theta_n\}$の一般項を求めよ。

(4)　(3)の数列$\{\theta_n\}$に対し，$\left|\theta_{n+1} - \theta_n\right| \leqq \dfrac{\pi}{1000}$となる最小の自然数$n$を求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{6}$ を考える。C 上の点 $\mathrm{D}(-1,\ 2)$ における C の接線を l とし, D と異なる C と l の共有点を E とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) E の座標を求めよ。

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を考える。ただし, a と b はともに正であるとする。直線 l 上の動点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき, A の座標を求めよ。

(4) A を(3)で求めた点とする。点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上で，3 つの不等式 $y \geqq 0$，$x+y \geqq 4$，$2x+3y \leqq 12$ によって表される領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。D に含まれる格子点をすべて求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする。点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ。

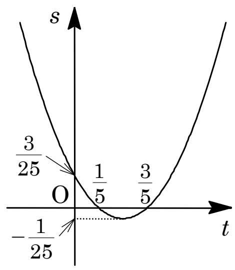
(4) 1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする。点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

1

問題のページへ

(1)　$s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)=t^2-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{3}{25}=\left(t-\dfrac{2}{5}\right)^2-\dfrac{1}{25}$

これより，グラフは右図のようになる。



(2)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

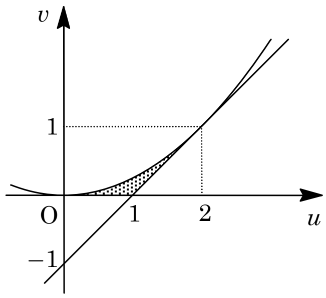
条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x$，y について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$$-\frac{u^2}{4}+v\leqq 0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 0\leqq\frac{u}{2}\leqq 1\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(0)=v\geqq 0\cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1-u+v\geqq 0\cdots\cdots\cdots④$$

①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



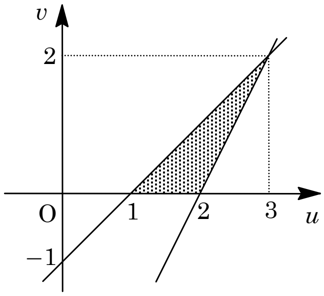
(3)　条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x$，y について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$$f(0)=v\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$f(1)=1-u+v\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$f(2)=4-2u+v\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

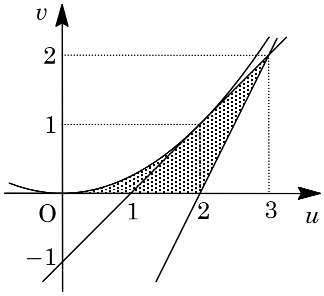


(4)　点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，x, y の条件は $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(2), (3)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x$，y について，解と係数の関係から，

$$x+y=u,\ \ xy=v$$

これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(2), (3)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，



$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\left[\,u^3\,\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

［解 説］

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(2)と(3)の結果が(4)にストレートにつながっています。ただ, (1)の意図は不明ですが。

2

問題のページへ

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right| = \sin\dfrac{\theta}{2} < 1$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ から，

$$\cos\alpha = \sin\frac{\theta}{2},\ \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

すると，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ となるので，

$$f(\theta) = -\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$$

(3)　条件より，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta_{n+1} = -\dfrac{\theta_n}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ ……①となり，$\theta_{n+1}-\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(\theta_n-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\theta_n-\frac{\pi}{3} = \left(\theta_1-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$\theta_n = \dfrac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ ………②

(4)　①②から，$\theta_{n+1}-\theta_n = -\dfrac{3}{2}\theta_n+\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}+\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

ここで，$\left|\theta_{n+1}-\theta_n\right| \leqq \dfrac{\pi}{1000}$ より，$\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{\pi}{1000}$ となり，$2^n > 500$ ………③

よって，③を満たす最小の自然数 n は，$2^8 = 256$，$2^9 = 512$ から $n = 9$ である。

［解　説］

三角関数と数列についての基本的な問題です。(1)と(2)はいろいろな変形が考えられますが，θ や α の範囲が限定されているので，上の解法が明快でしょう。

3

問題のページへ

(1) 曲線$C: y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ ……①に対して，$y'=-x^2+\frac{1}{2}$となり，C 上の点 D$(-1,\ 2)$における接線lの方程式は，その傾きが$y'=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$から，

$$y-2=-\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) Cとlの共有点は，①②を連立して，$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}=0,\quad x^3-3x-2=0,\quad (x+1)^2(x-2)=0$$

よって，$x=-1,\ 2$となり，D と異なる共有点 E の座標は$\mathrm{E}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$である。

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点$\mathrm{A}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$に対し，

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

また，直線l上の動点 P に対し，$\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\cos\theta-\frac{1}{2}t\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\theta=\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)t+\frac{3}{2}\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots③$$

③が P の位置によらず一定，すなわちtの値によらず一定である条件は，

$$\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0,\quad \sin\theta=2\cos\theta$$

すると，$4\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$から，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$となり，このとき A の座標は$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$である。

(4) 点 Q がC上を D から E まで動くとき，$\mathrm{Q}\left(s,\ -\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s+\frac{13}{6}\right)$とおく。ただし，$-1\leqq s\leqq 2$である。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(s-\frac{2}{3}s^3+s+\frac{13}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{3}s^3+2s+\frac{13}{3}\right)$$

ここで，$f(s)=-\frac{2}{3}s^3+2s+\frac{13}{3}$とおくと，

$$f'(s)=-2s^2+2=-2(s+1)(s-1)$$

$-1\leqq s\leqq 2$における$f(s)$の増減は右表のようになり，$s=1$のとき最大となる。

s	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(s)$	0	$+$	0	$-$	
$f(s)$		$\nearrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$の最大値は，$\frac{17}{3\sqrt{5}}=\frac{17}{15}\sqrt{5}$である。

［解　説］

微分と増減にベクトルの内積が味付けされています。方針に迷うような箇所はなく，計算はスムーズに進んでいきます。

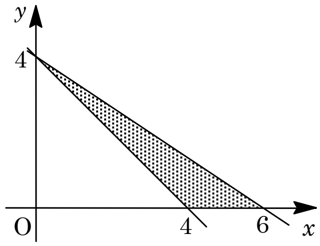
4

問題のページへ

(1) 連立不等式 $y \geqq 0$，$x+y \geqq 4$，$2x+3y \leqq 12$ によって表される領域 D は,

$$y \geqq 0\,,\ -x+4 \leqq y \leqq -\frac{2}{3}x+4$$

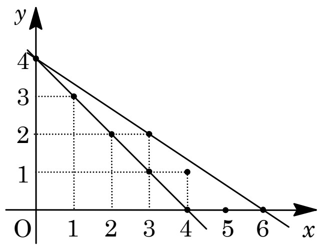
これを図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



(2) D に含まれる格子点は, 次の 9 個となる。

$(0,\ 4)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$

$(4,\ 0)$，$(4,\ 1)$，$(5,\ 0)$，$(6,\ 0)$



(3) 1 個のさいころを 2 回投げるとき, 1 回目に出た目の数 X, 2 回目に出た目の数 Y に対し, 点$(X,\ Y)$が D に含まれる場合は,

$$(X,\ Y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

すると, その確率は $\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$ となる。

(4) 1 個のさいころを n 回$(n \geqq 2)$投げるとき, 出た目の数の中の最小の数 Z, 最大の数 W に対し, 点$(Z,\ W)$が D に含まれる場合は,

$$(Z,\ W)=(1,\ 3),\ (2,\ 2)$$

(i) $(Z,\ W)=(1,\ 3)$ のとき

出た目の数を U とし, U が k 以上 l 以下である確率を $P(k \leqq U \leqq l)$ とおくと, $(Z,\ W)=(1,\ 3)$ の確率は,

$$P(1 \leqq U \leqq 3)-P(1 \leqq U \leqq 2 \text{ または } 2 \leqq U \leqq 3)$$
$$=P(1 \leqq U \leqq 3)-\{P(1 \leqq U \leqq 2)+P(2 \leqq U \leqq 3)-P(2 \leqq U \leqq 2)\}$$
$$=\left(\frac{3}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(ii) $(Z,\ W)=(2,\ 2)$ のとき

出た目の数 U がすべて 2 の場合より, $(Z,\ W)=(2,\ 2)$ の確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(i)(ii)より, 点$(Z,\ W)$が D に含まれる確率は,

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。特に, 設問(4)は有名頻出題の 1 つです。